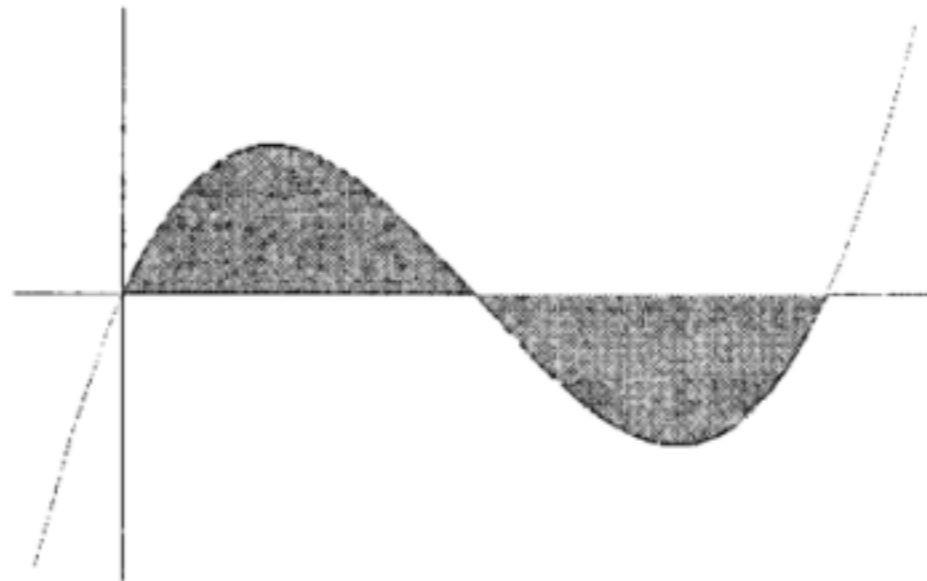


A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu).

## QÜESTIONS

1. Donada la matriu  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , utilitzeu la matriu inversa  $B^{-1}$  per trobar una matriu  $X$  tal que  $B \cdot X \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . [2 punts]
2. Trobeu les equacions d'un pla paral·lel al pla d'equació  $2x - 2y + z - 8 = 0$  i que dista d'aquest sis unitats. N'hi ha més d'un, de pla, que compleixi aquestes condicions? [2 punts]
3. Considereu la funció  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$  la gràfica de la qual és aproximadament la del dibuix següent:



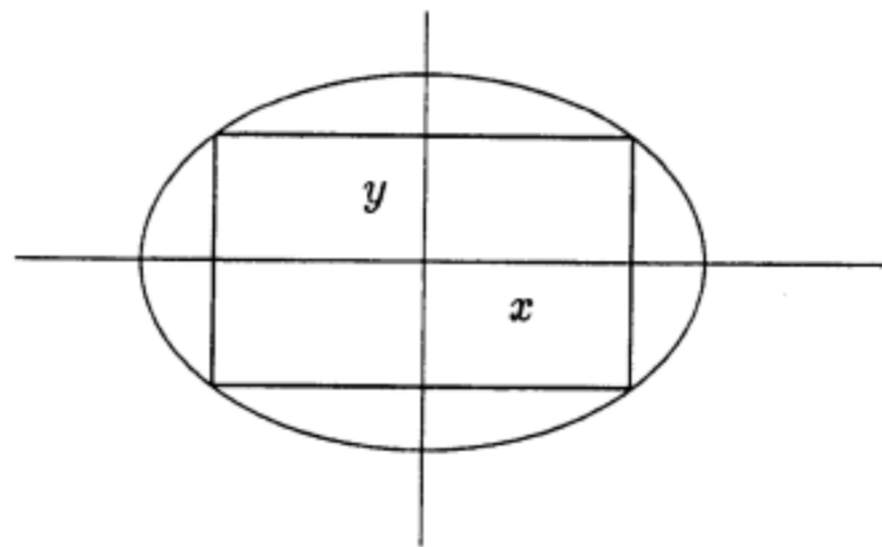
- Calculeu l'àrea de la regió ombrejada. [2 punts]
4. En quin punt de la corba  $f(x) = \ln x$  la recta tangent és paral·lela a la corda  $AB$  determinada pels punts  $A = (1, 0)$  i  $B = (e, 1)$ ? [2 punts]



A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu).

### QÜESTIONS

1. Trobeu els costats d'un rectangle d'àrea màxima inscrit a l'el·lipse d'equació  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ , tal com s'indica en la figura següent:



[2 punts]

2. Sigui  $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 5b$ . Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  de manera que la gràfica de  $f(x)$  tingui la tangent horitzontal per a  $x = 1$  i, a més, la corba passi pel punt  $(-1, -8)$ .  
[2 punts]
3. Sigui  $\pi$  el pla de l'espai que passa pel punt  $(0, 0, 3)$  i que conté els vectors  $\vec{u} = (1, 2, -5)$  i  $\vec{v} = (2, 1, -3)$ . Sigui  $r$  la recta d'equacions:

$$\left. \begin{aligned} 4x - y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) Escriviu l'equació cartesiana del pla  $\pi$  (equació de la forma  $ax + by + cz = d$ ).  
b) Estudieu la posició relativa de  $r$  respecte a  $\pi$  (heu de dir si  $r$  és paral·lela a  $\pi$ , si està continguda en  $\pi$  o bé si talla  $\pi$ ).  
[2 punts: 1 cada apartat]
4. a) Sigui  $P$  un punt de l'espai, i  $\pi$ , un pla. Definiu el concepte de distància del punt  $P$  al pla  $\pi$ .  
b) Sigui  $P$  el punt de coordenades  $(1, 1, 0)$ , i  $\pi$ , el pla d'equació  $x + y + z = 5$ . Trobeu la distància de  $P$  a  $\pi$ .  
[2 punts: 1 cada apartat]

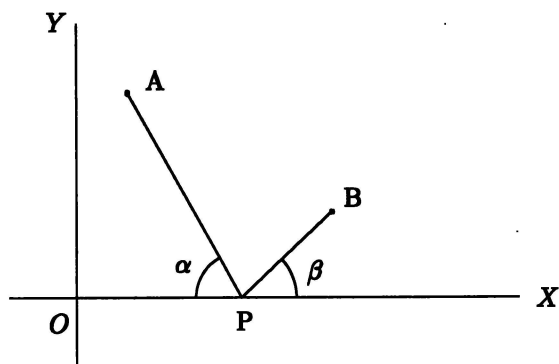
## PROBLEMES

1. Es vol mesurar l'amplada d'un riu. A una distància de 25 m d'una de les ribes hi ha una torre de telecomunicacions de 35 m d'alçària. Pugem dalt de la torre i observem l'angle que formen les visuals que van cap a una riba i cap a l'altra, que és de  $20^\circ$ .

Feu un croquis de la situació i calculeu, amb aquestes dades, l'amplada del riu.

[4 punts]

2. L'eix  $OX$  representa la banda d'una taula de billar. Una bola que està situada al punt  $A = (1, 6)$  ha de tocar una bola situada al punt  $B = (5, 2)$  després d'haver rebotat a la banda (quan una bola de billar rebot a la banda, els angles  $\alpha$  i  $\beta$  de la figura són iguals).



Determineu:

- a) El punt exacte  $P$  on la bola hauria de topar amb la banda.
- b) L'equació de la trajectòria inicial que ha de seguir la bola.
- c) L'equació de la trajectòria que segueix la bola després d'haver topar amb la banda, fins a tocar la bola en el punt  $B$ .
- d) L'angle entre les trajectòries  $AP$  i  $PB$ .

[4 punts: 1 cada apartat]