SÈRIE 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix},$$

per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre a.
[1 punt]

Resolució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2 - a^2 \\ 0 & -1 & (a-1)^2 - a^2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
A la tercera fila restar-li la primera

(2) Operar a les files segona i tercera

(3) A la tercera fila sumar-li la segona

Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent amb una de triangular amb tres files no nul·les i per tant $rang(M) = 3$.

b) El sistema $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu M, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 1, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & (a+1)^2 \\ 1 & 1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}} = 0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x = 1, y = 0,\ z = 0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat ***b)*** també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat ***a)***.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel primer pas de triangulació.

0,25 punts pel segon pas de triangulació.

0,25 punts pel tercer pas de triangulació.

0,25 punts per l'argumentació i resposta final.

Apartat b)

0,5 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la formulació del mètode de Cramer.

0,25 punts pels càlculs i solució final.

Observació: Les resolucions correctes via menors no nuls o bé per Gauss, allà on sigui possible, seran valorades amb la totalitat de la puntuació.

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt *A* respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt *A* respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

Resolució:

a) Per a fer el simètric respecte de la recta r construirem primer el pla, diguem-ne π', que talla perpendicularment la recta r i que passa pel punt *A*. Aquest pla té per vector normal el vector director de r, és a dir $(1,0,-1)$.

Per tant és un pla d'equació $x - z = D$ i si ha de passar per *A*, tindrem $1 - 3 = D$, o sigui $D = -2$. Per tant el pla perpendicular té equació $\pi': x - z = -2$.

Calculem el punt intersecció, diguem-ne *B*, del pla amb la recta, el que seria el punt projecció del punt *A* sobre la recta r, substituint l'equació paràmetrica de la recta en l'equació del pla.

$$3 + \lambda - (3 - \lambda) = -2$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (2,1,4)$.

Així el punt simètric del punt *A* respecte de la recta, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((2,1,4) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (2,-2,2) = \boxed{(3,0,5)}$.

b) Obtindrem primer el punt, diguem-ne *B*, projecció perpendicular del punt *A* sobre el pla π, construint la recta perpendicular al pla i que passa per *A*. El vector director d'aquesta recta serà el vector normal del pla, és a dir $(1,1,1)$.

Per tant, l'equació de la recta serà $s: (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$.
La intersecció de s i π és quan

$$1 + \lambda + 2 + \lambda + 3 + \lambda = 3.$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (0,1,2)$.

Així el punt simètric del punt *A* respecte del pla, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((0,1,2) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (-2,-2,-2) = \boxed{(-1,0,1)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per identificar el vector director de la recta.

0,25 punts per l'equació del pla perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

Apartat b)

0,25 punts per identificar el vector normal del pla.

0,25 punts per l'equació de la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

---

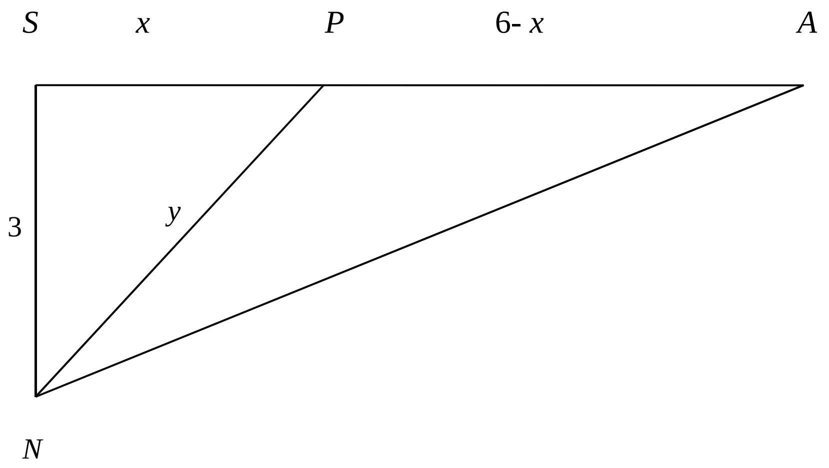
3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$.
[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?
[1 punt]

Resolució:

a) La situació gràfica és la següent:



Sabem que $\overline{NS} = 3$ km i $\overline{SA} = 6$ km. Anomenem $\overline{NP} = y$.

La funció que calcula el temps que es demana és $t(x) = \frac{y}{3} + \frac{6-x}{5}$.

Per Pitàgoras tenim la relació $y = \sqrt{x^2+9}$ i per tant $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$, com volíem veure.

b) Per a trobar el mínim de la funció t calculem la seva derivada i la igualem a zero.

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}.$$

Si fem $t'(x) = 0$ obtenim $\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{5}$, i d'aquí $5x = 3\sqrt{x^2+9}$

$$25x^2 = 9x^2 + 81$$

$$16x^2 = 81$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{81}{16}} = \pm 2{,}25$$

Observem que la solució negativa no es situa en el context del problema. Per tant l'únic candidat a extrem de la funció és quan $x = 2{,}25$.

Per a determinar que en $x = 2{,}25$ la funció té un mínim, calculem la derivada segona i obtenim $t''(x) = \frac{3}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ i observem que és sempre positiva.

Per tant com que $t''(2{,}25) > 0$ podem assegurar que en $\boxed{x = 2{,}25\ km}$ la funció té un mínim.

El temps mínim serà $\boxed{t(2{,}25) = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 2\ hores}$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament gràfic del problema.

0,25 punts pel Teorema de Pitàgoras.

0,25 punts pel temps en el primer tram.

0,25 punts pel temps en el segon tram.

Apartat b)

0,25 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la derivada segona i classificació de mínim. S'admet, amb la totalitat de la puntuació, que l'estudiant ho justifiqui correctament pel context del problema i no utilitzi la derivada segona.

0,25 punts per a la substitució.

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.
[2 punts]

Resolució:

Es tracta de l'àrea limitada per dues paràboles que comparteixen el seu vèrtex, el punt (0,0), i la recta horitzontal $y = 9$.

Calculem en quines abscisses del primer quadrant l'horitzontal talla cadascuna de les paràboles.

$x^2 = 9$ porta a $x = 3$.

$4x^2 = 9$ porta a $x = +\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Per tant l'àrea serà (plantejant la integral de les diferències verticals entre la funció que marca el punt superior de la regió i la funció que marca el punt inferior de la regió)

$$\int_0^{3/2} (4x^2 - x^2)dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx = \int_0^{3/2} 3x^2 dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx =$$

$$= x^3\Big|_0^{3/2} + \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{3/2}^{3} = \frac{27}{8} + (27 - 9) - \left(\frac{27}{2} - \frac{9}{8}\right) = \boxed{9\ u^2}.$$

Observació: La mateixa regió també es pot subdividir en tres diferents regions i calcular l'àrea per separat i operar entre elles.

Pautes de correcció:

0,25 punts pel primer punt de tall.

0,25 punts pel segon punt de tall.

0,25 punts pel plantejament de la primera integral.

0,25 punts pel plantejament de la segona integral.

0,25 punts pel càlcul de la primera primitiva.

0,25 punts pel càlcul de la segona primitiva.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la primera integral.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la segona integral.

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.
[1 punt]

Resolució:

a) Els punts generals de les rectes r i s són, respectivament, de la forma

$$R = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$$
$$S = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha).$$

.Calculem l'expressió dels punts mitjans:

$$M = \frac{R+S}{2} = \left(\frac{3 + 3\lambda + 2\alpha}{2}, \frac{3 + \lambda - \alpha}{2}, \frac{3 + 4\lambda + 3\alpha}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

I podem veure que efectivament formen un pla que és, a partir de l'expressió vectorial anterior, el que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors de les dues rectes, és a dir $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$.

b) Sabem que és el pla que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$, per tant seran els punts (x, y, z) que satisfan l'equació

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & 3 & 2 \\ y - \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ z - \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$7\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) - 5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{7x - y - 5z = \frac{3}{2}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per les equacions paramètriques de les rectes.

0,5 punts per l'expressió general dels punts mitjos.

0,25 punts per l'argumentació de formar un pla.

Apartat b)

0,5 punts per la formulació de l'equació.

0,5 punts pel càlcul final.

---

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2 = I$.
[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.
[1 punt]

Resolució:

a) $A^2 = I$ ho podem reescriure com $A \cdot A = I$. Això ens diu que quan la matriu A la multipliquem per ella mateixa, sigui per la dreta o per l'esquerra, ens dóna la identitat. I això és precisament el que s'ha de complir per tal que A sigui invertible. A més a més, veiem que la seva inversa és ella mateixa, és a dir $A^{-1} = A$. Essent així, $(A^{-1})^2 = A^2 = I$ com voliem demostrar.

Observació: Alternativament, que la matriu sigui invertible també es pot demostrar a partir d'aplicar determinants i veure que té determinant no nul.

b) S'ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} aa+bc & ab+2b \\ ac+2c & bc+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quan igualem terme a terme obtenim el següent sistema d'equacions

$$\begin{cases} aa+bc & = & 1 \\ ab+2b & = & 0 \\ ac+2c & = & 0 \\ bc+4 & = & 1 \end{cases}$$

De la segona equació tenim $(a+2)b = 0$ i com que $b \neq 0$ deduïm $a+2=0$ i per tant que $a=-2$.

Quan substituïm $a=-2$ en el sistema ens queda

$$\begin{cases} bc & = & -3 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ bc & = & -3 \end{cases}$$

Per tant l'altra condició que se'n obté és $c = \frac{-3}{b}$ i per tant la forma general de les matrius que es demana és $\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix} amb\ b \neq 0}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'argumentació de ser invertible (factoritzant prèviament o no).

0,5 punts per comprovar la igualtat.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts per la resolució del sistema.

0,25 punts per l'expressió final de les matrius.

SÈRIE 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

- Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció *f*. [1 punt]
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f* en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y = -5x + 4$. [1 punt]

Resolució:

a) El domini de la funció *f*, com a quocient de polinomis que és, són tots els nombre reals llevat aquells que anul·lin el denominador, en aquest cas el punt $x = 2$. En aquest punt s'anul·la el denominador i no el numerador i per tant tenim

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-2} = \infty.$$

Per tant la funció *f* té una $\boxed{\text{única asímptota vertical en } x = 2.}$

Per al càlcul de les asímptotes horitzontal hem de calcular

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1.$$

Per tant la funció *f* té una $\boxed{\text{asímptota horitzontal en la recta } y = 1.}$

Aleshores en tenir asímptota horitzontal quan $x \longrightarrow \pm\infty$ $\boxed{\text{no té cap asímptota oblícua.}}$

b) La recta $y = -5x + 4$ té pendent -5, per tant se'ns demana calcular la recta tangent en els punts que aquesta tingui pendent, és a dir derivada de *f*, -5.

Si derivem i igualem a -5 obtenim:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - (x+3) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Si $\frac{-5}{(x-2)^2} = -5$ aleshores $(x-2)^2 = 1$ i per tant $x - 2 = \pm 1$, és a dir $x = 1$ o $x = 3$.

Per tant tenim dues rectes tangents a calcular, totes dues amb pendent -5.

Quan $\boxed{x = 1}$ tenim $f(1) = -4$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-1) + (-4) = -5x + 1}$$

Quan $\boxed{x = 3}$ tenim $f(3) = 6$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-3) + 6 = -5x + 21}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'asímptota vertical.

0,25 punts per l'asímptota hortizontal.

0,25 punts per l'argumentació de l'asímptota oblícua.

Apartat b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel càlcul de les abscisses dels punts de tangència.

0,25 punts per la primera recta tangent.

0,25 punts per la segona recta tangent.

2. Responeu a les qüestions següents:

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y+(k^2-1)z &= 0 \\ (4k+1)x-y-7z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$$

en funció dels valors de k.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k=1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Les matrius de coeficients, A, i ampliada, A', del sistema són

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k-1 & k^2-1 & 0 \\ 4k+1 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

i es tracta d'estudiar el rang(A) i el rang(A').

Per a determinar els valors de discussió del paràmetre k mirem quan el rang(A) és màxim, és a dir 3, que serà quan el seu determinant sigui diferent de zero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k-1 & k^2-1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (k-1)\big((4k+1)(k+1)-7+(k+1)-(4k+1)\big) =$$

$$= (k-1)(4k^2+2k-6).$$

Quan igualem a zero i resolem l'equació de segon grau obtenim $k=1$ i $k=\frac{-3}{2}$.

Observació: Si el càlcul del determinant es fa sense treure factor comú, aleshores cal aplicar la regla de Ruffini al polinomi $2k^3-k^2-4k+3$ i veure que té té una arrel doble en $k=1$ i que pot factoritzar com

$$2k^3-k^2-4k+3=(k-1)^2(2k+3)$$

Amb el que s'obtenen les mateixes solucions $k=1$ i $k=\frac{-3}{2}$.

Així doncs:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, aleshores $|A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A')$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema serà Compatible Determinat.
- Si $k=1$ $|A|=0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, i com que la primera fila és nul·la la matriu ampliada també tindrà rang 2 i el sistema serà Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir una incògnita indeterminada.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

Per a calcular el rang de la matriu ampliada podem orlar el menor anterior fent servir la primera fila i la columna dels termes independents.

$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-5}{2} \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $k = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema és Incompatible.

b)

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ i podem prescindir de la primera equació perquè s'ha anul·lat. Passem la tercera equació a la primera i si aliquem el mètode de Gauss (a la segona equació li restem 5 vegades la primera) tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1+12z \end{array}\right),$$

i per tant $y = \frac{1+12z}{-6} = -\frac{1}{6} - 2z$

i substituint a la primera equació $x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z$.

Així doncs els punts solució del sistema d'equacions són els de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, amb z indeterminada.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per l'argumentació i càlcul del determinant de la matriu de coeficients.

0,25 punts per trobar els valors de discussió i la discussió general primera.

0,25 punts pel cas k=1.

0,25 punts pel cas k=-3/2.

Apartat b)

0,25 punts per la substitució.

0,5 punts per la resolució (amb independència del mètode).

0,25 punts per la solució final.

---

3. Siguin els punts $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ i $R = (0, 1, 1)$ i el pla $\pi: x + y + z = 4$.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pels punts P, Q i R.

[1 punt]

b) Si S és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

[1 punt]

Resolució:

a) El pla que passa pels punts P, Q i R té per vectors directors, per exemple, els vectors $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$ i per tant un punt (x, y, z) del pla haurà de satisfer la igualtat (demanant que passi pel punt P)

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 - y + 1 - z = 0.$$

És a dir $\boxed{x + y + z = 2}$.

b) Si S és un punt del pla $\pi: x+y+z=4$, aleshores S és de la forma $(x,y,4-x-y)$.

Així doncs el tetraedre de vèrtexs *P*, *Q*, *R* i *S* tindrà per arestes els vectors

$\overrightarrow{PQ}=(1,0,1)-(1,1,0)=(0,-1,1)$,

$\overrightarrow{PR}=(0,1,1)-(1,1,0)=(-1,0,1)$ i

$\overrightarrow{PS}=(x,y,4-x-y)-(1,1,0)=(x-1,y-1,4-x-y)$

i per tant el seu volum serà

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0 & -1 & x-1\\ -1 & 0 & y-1\\ 1 & 1 & 4-x-y\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|-x+1-y+1-4+x+y|$$
$$=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}\,u^3}.$$

que és una constant i per tant independent del punt *S*.

Alternativament: El volum del tetraedre no depèn del punt S ja que es tracta d'un tetraedre amb tres punts (*P*, *Q* i *R*) sobre un pla $x+y+z=2$ i un quart punt (*S*) sobre un pla que és paral·lel al pla anterior $x+y+z=4$. Observem que els dos plans tenen per vector normal el vector $(1,1,1)$. Per tant tindrem sempre la mateixa "àrea de la base", l'àrea del triangle *PQR*, i la mateixa "alçada", la distància entre els dos plans.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'obtenció dels dos vectors directors.

0,25 punts pel plantejament de l'equació general.

0,25 punts pel càlcul final.

Apartat b)

0,5 punts per la forma paramètrica d'un punt del pla.

0,25 punts per la formulació del volum.

0,25 punts pel càlcul del volum.

Observació: Si l'apartat b) es resol de manera totalment correcta només argumentant a partir del paral.lelisme entre els plans i el fet que, aleshores, els tetraedres resultants tenen la mateixa àrea de la base i la mateix alçada, es puntuarà l'apartat amb 1 punt.

4. Donats els plans $\pi_1:\ x-4y+z=2m-1$ i $\pi_2:\ 2x-(2m+2)y+2z=3m+1$.

a) Determineu els valors de *m* perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de *m*.

[1 punt]

b) Sigui el pla $\pi:\ 3x-2y+3z=8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta *r* definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m=1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Que els dos plans π_1 i π_2 s'intersectin en una recta, diguem-ne r vol dir que el sistema d'equacions format per les respectives equacions dels plans és compatible indeterminat.

El sistema és

$$\begin{cases}\pi_1:\ x-4y+z=2m-1\\ \pi_2:\ 2x-(2m+2)y+2z=3m+1\end{cases}$$

o en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & 1 & 2m-1\\ 2 & -2m-2 & 2 & 3m+1\end{array}\right),$$

i només es tracta de garantir que la matriu de coeficients tingui rang 2, és a dir que el menor $\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -2m-2\end{vmatrix}$ sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -2m-2\end{vmatrix}=-2m-2+8=-2m+6=0\Leftrightarrow m=3.$$

Per tant, π_1 i π_2 s'intersecten en una recta si i només si $m\neq 3$.

Per a aquests casos el vector director de la recta r serà el producte vectorial dels respectius vectors normals de cada pla, és a dir $(1,-4,1)$ i $(2,-2m-2,2)$, o el que és equivalent el producte vectorial de $(1,-4,1)$ i $(1,-m-1,1)$.

Per tant tindrem

$$v_r=(1,-4,1)\times(1,-m-1,1)=\begin{vmatrix}i & 1 & 1\\ j & -4 & -m-1\\ k & 1 & 1\end{vmatrix}=(m-3,0,-m+3).$$

Ara bé com que estem en el cas $m\neq 3$, la primera i tercera component del vector v_r són diferent de 0 i podem simplificar el vector dividint per $m-3$ obtenint un vector director equivalent i que no depèn de *m*: $\boxed{v_r=(1,0,-1)}$.

b) El vector director de la recta *r* és $v_r=(1,0,-1)$ i el vector normal del pla π és $v_\pi=(3,-2,3)$. Com que $v_r\cdot v_\pi=3-3=0$ aleshores els dos vectors són perpendiculars, $v_r\perp v_\pi$, i per tant $\boxed{\text{la recta } r \text{ és paral·lela al pla } \pi}$.

Per a saber si la recta *r* està continguda o no en el pla, podem agafar un punt de *r* i veure si satisfà l'equació del pla.

Si fem, per exemple, $x = 0$ en les equacions de r, obtenim el punt $(0, \frac{1}{2}, 3)$ que podem comprovar que també pertany al pla π, ja que $3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8$. Per tant, $\boxed{\text{la recta } r \text{ està continguda en el pla } \pi.}$

Observació: Alternativament, també es podia decidir a partir d'estudiar les interseccions dels plans π_1, π_2 i π, per al cas $m = 1$, i veure que es tracta d'un sistema compatible indeterminat.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament matricial.

0,25 punts pel valor que fa que el rang sigui 2.

0,25 punts pel vector director.

0,25 punts per veure que es pot reduir i és independent del paràmetre.

Apartat b)

0,5 punts pel paral·lelisme de la recta i el pla.

0,5 punts per veure que la recta està continguda en el pla.

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Si A i B són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$$

[1 punt]

b) Si M_1 i M_2 són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $M_1 \cdot M_2$ té també la mateixa forma i que $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Si desenvolupem el terme quadràtic i tenim en compte que el producte de matrius no és commutatiu, obtenim

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Per tant la igualtat de l'enunciat es cumplirà si i només si

$$\begin{aligned} &A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &AB + BA = 2AB \\ &BA = 2AB - AB \\ &BA = AB. \end{aligned}$$

b) Denotem $M_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ i $M_2 = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ i fem el producte $M_1 \cdot M_2$.

$$\boxed{M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}}$$

I efectivament podem veure que la matriu producte és de la mateixa forma ja que coincideixen els elements de la diagonal principal i són oposats els elements de la diagonal segona.

Per a comprovar la commutativitat de les matrius M_1 i M_2 fem l'altre producte

$$\boxed{M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} = M_1 \cdot M_2.}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts pel desenvolupament del quadrat.

0,5 punts per l'argumentació de la condició de la commutativitat.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

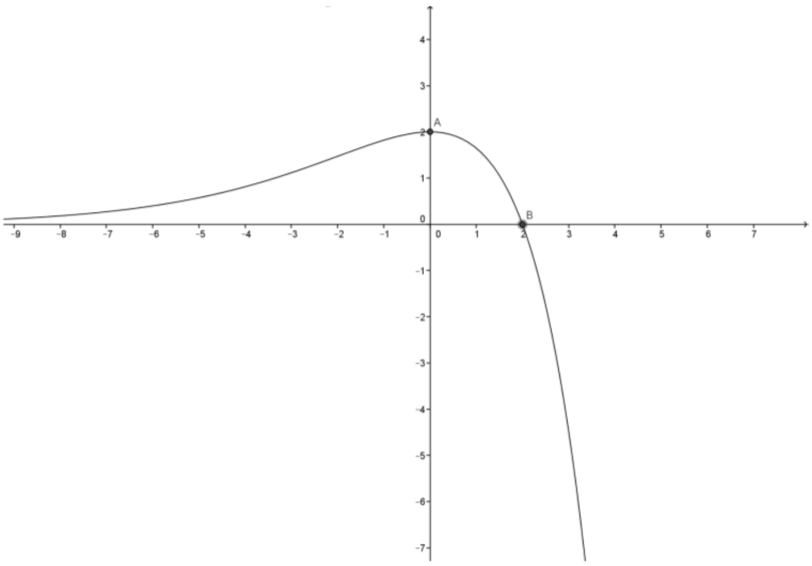
0,25 punts per la identificació de la forma matricial.

0,25 punts pel segon càlcul matricial.

0,25 punts per la comprovació de commutativitat.

6. Responeu a les qüestions següents:

a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A = (0{,}2)$ i $B = (2{,}0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_1^2 x \cdot \ln\, x\ dx$.

[1 punt]

Resolució:

a) Tenim $f(x) = (b - x)e^{ax}$.

Que la gràfica passi pel punts $A = (0{,}2)$ vol dir $f(0) = 2$. És a dir $f(0) = b = 2$.

Per tant la funció té l'expressió $f(x) = (2 - x)e^{ax}$.

Anàlogament, si la gràfica passa per $B = (2{,}0)$, aleshores $f(2) = 0$, independentment del valor del paràmetre a.

Per altra banda, si en el punt A, la recta tangent a la gràfica és horitzonal, aleshores $f'(0) = 0$.

Calculem $f'(x)$.

$$f'(x) = -1 \cdot e^{ax} + (2 - x) \cdot ae^{ax}$$

I substituïm en $x = 0, f'(0) = -1 + 2a = 0$. I per tant $a = {}^{1}\!/_{2}$.

Així doncs la funció és $\boxed{f(x) = (2 - x)e^{x/2}}$.

b) Per a calcular $\int_1^2 x\cdot\ln\, x\ dx$, calcularem primer una primitiva de l’integrand, que serà una integral per parts, i després aplicarem la regla de Barrow.

$$\int x\ln\ x\ dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Per tant

$$\int_1^2 x\cdot\ln\ x\ dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{2\ln 2 - \frac{3}{4}.}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la primera condició i càlcul de la b.

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts per la condició de màxim relatiu.

0,25 punts pel càlcul de la a.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels elements de la integral per parts

0,25 punts per l’aplicació de la fórmula d’integració per parts.

0,25 punts per la resolució de la següent integral.

0,25 punts per l’aplicació de la regla de Barrow.