SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1.- Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació $(x,y,z)=(-1,1,1)+t\cdot(1,2,1)$ que estan a distància 1 del pla $2x+2y+z=5$.

Un punt qualsevol de la recta és $(t-1,2t+1,t+1)$. Imposar que es troba a distància 1 del pla equival a fer

$$\left|\frac{2(t-1)+2(2t+1)+t+1-5}{\sqrt{4+4+1}}\right|=1$$

Ara només resta resoldre $\frac{7t-4}{3}=\pm 1$, resultant $t=1$ i $t=1/7$. Així els punts buscats són

$$(0,3,2) \text{ i } \left(-\frac{6}{7},\frac{9}{7},\frac{8}{7}\right).$$

1 punt per arribar a l'expressió DISTÀNCIA=1.
0.5 punts per cada solució.

2.- Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per algun valor de *m*.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y+2z &=& 0 \\ 2x+4y+3z &=& 0 \\ x+y+mz &=& 0 \end{array}\right\}$$

És incompatible per algun valor de *m*?.

En primer lloc s'estudia el rang de la matriu de coeficients.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&3\\1&1&m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-2&-1\\0&-2&m-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-2&-1\\0&0&m-1\end{pmatrix}.$$

Per tant, si $m=1$ $\operatorname{rang}(A)=2$ i és igual a 3 per a la resta de valors de m.

Així, si $m=1$ el sistema és compatible indeterminat.

Finalment, com que el sistema és homogeni mai pot ser incompatible.

1 punt per l'estudi del rang o, simplement, per esbrinar quin valor de m discrimina.
0.5 punts per dir quan és compatible indeterminat.
0.5 punts per raonar que el sistema no pot ser incompatible

3.- Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}$

a) Calculeu $A\cdot B$ i $B\cdot A$.

b) Comproveu que $(A+B)^2=A^2+B^2$.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&3\end{pmatrix}$, $\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-3\end{pmatrix}$.

b) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+B^2$, ja que al primer apartat es comprova que $AB=-BA$.

a) 0.5 punts per cada producte.
b) 1 punt. Evidentment, els estudiants ho poden comprovar operant les matrius.

4.- Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$.

El domini de la funció és $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.
La funció té per asímptota vertical la recta $x=1$, corresponent a la discontinuïtat.
D'altra banda,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+1}{x^2-x}=1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+1}{x-1}=-3.$$

Per tant, y=x-3 és una asímptota obliqua a dreta i esquerra.

0.5 punts per identificar domini.
0.5 per l'asímptota vertical.
0.5 pel pendent de l'asímptota obliqua.
0.5 per l'ordenada a l'origen.

PROBLEMES

5.- Una recta *r* passa pel punt *A*=(3,0,2) i té la direcció del vector (-1,1,4).

a) Trobeu quin angle forma *r* amb el pla horitzontal.

b) Comproveu que no passa pel punt *B*=(1,3,10).

c) Trobeu l'equació de la recta que passa per *A* i *B.*

a) Se sap que el sinus de l'angle α que forma el vector $(-1,1,4)$ amb el pla horitzontal, és a dir, $z=0$, s'obté de fer

$$\sin\alpha = \cos(90-\alpha) = \frac{(-1,1,4)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}},$$

que també serveix per trobar el cosinus de l'angle complementari. Llavors, $\alpha = 70.529^\circ = 1.231\ rad$.

b) El vector $\vec{v}$ que uneix els punts *A* i *B* és $\vec{v} = (1,3,10)-(3,0,2) = (-2,3,8)$. Com que aquest vector no és paral·lel a $(-1,1,4)$, la recta no passa pel punt *B.*

c) L'equació de la recta és $(x,y,z) = (3,0,2) + t(-2,3,8)$.

1.5 punts pel primer apartat. Si en lloc del sinus de l'angle o el cosinus del complementari es fa servir el cosinus de l'angle, penalitzeu però no poseu zero.
1 punt pel segon apartat. Cal pensar que alguns estudiants poden buscar l'equació de la recta i comprovar si el punt *B* és d'ella.
1.5 punts pel tercer apartat.

6. Considereu la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.

a) Calculeu *c* sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x=0$ és horitzontal.

b) Per al valor de *c* trobat a l'apartat anterior, calculeu *a* i *b* sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-2$ i que talla a l'eix *OX* quan $x=1$.

c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

a) La condició equival a demanar $f'(0)=0$. Com que $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$, llavors $c=0$.

b) La condició d'extrem relatiu a $x=-2$ és $f'(-2)=0$, és a dir, $-32+12a-4b=0$.

La de tall a l'eix OX quan $x=1$ correspon a $f(1)=0$ i, per tant, $1+a+b+7=0$.

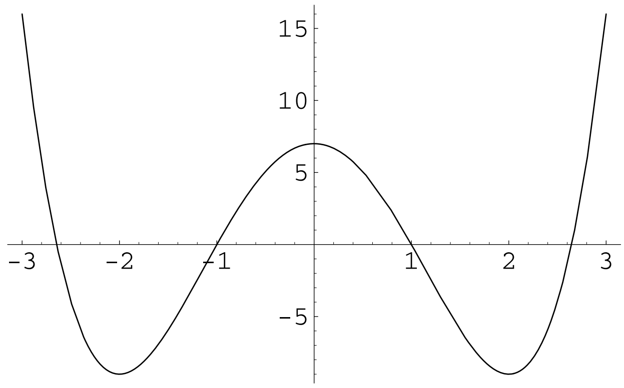
Per tot això, cal resoldre $\left.\begin{matrix} 3a-b=8 \\ a+b=-8 \end{matrix}\right\}$ que té per solució $a=0,\ b=-8$.

c) Els càlculs anteriors condueixen a $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$, que té per derivada $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Per trobar els extrems relatius es resol $f'(x) = 0$ que té per solucions $x = 0,\ x = -2,\ x = 2$. La derivada és positiva a $(-2,0) \cup (2,\infty)$ i la funció creix en aquesta regió. La funció decreix en els intervals en què la derivada és negativa, és a dir, dins $(-\infty,-2) \cup (0,2)$.

Considerant els signes de la derivada, es pot afirmar que a $x = -2$ i a $x = 2$ hi ha mínims relatius, mentre que a $x = 0$ es troba un màxim.

Màxim relatiu: $(0,7)$. Mínims relatius: $(-2,-9)$, $(2,-9)$.

La gràfica és



1 punt per l'apartat a).
1 punt per l'apartat b).
0.5 punts pels intervals de creixement i decreixement.
0.5 punts pels extrems relatius.
1 punt per la gràfica.

SÈRIE 3

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

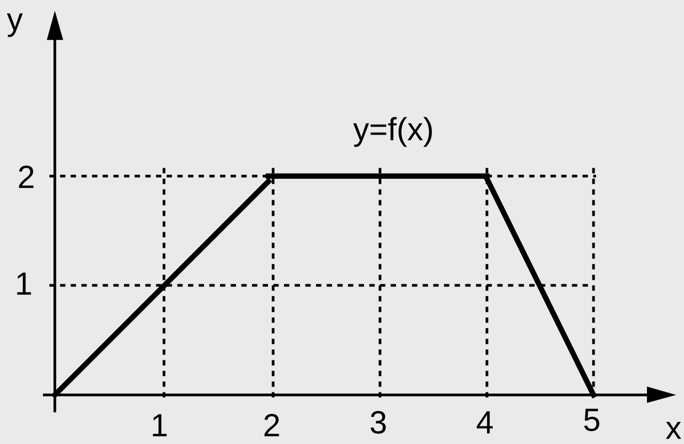
1. Considereu la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x=0$. Trobeu si hi ha altres punts en els que el pendent de la tangent sigui igual a l'obtingut.

En primer lloc es calcula la derivada de la funció, $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. Ara només resta calcular $f'(0)$, que proporciona un pendent igual a -1.

Per veure si hi ha altres punts, cal resoldre $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-1$ que, operant, es transforma en l'equació de segon grau $2x^2+4x=0$. Les solucions són $x=-2$ i $x=0$. Aquest últim és el punt estudiat a la primera part de la qüestió.

0.5 punts pel càlcul de la derivada.
0.5 punts pel càlcul del pendent
1 punt per la segona part de la qüestió.

2. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per $x \in [0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix.

b) Calculeu $\int_0^3 f(x)dx$.

a) La funció de la gràfica està constituïda per segments de recta que, d'esquerra a dreta, tenen pendent igual a 1, 0 i -2. Per tant, la funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; x \in (0,2) \\ 0 \;\; si \;\; x \in (2,4) \\ -2 \;\; si \;\; x \in (4,5) \end{cases}.$$

b) La integral demanada no és més que l'àrea del trapezi que limita a l'esquerra amb $x = 0$ i a la dreta amb $x = 3$.

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4 .$$

1 punt per cada apartat. Si al segon apartat l'estudiant busca les equacions de les rectes que formen la funció i calcula la integral, s'ha de donar per correcte, evidentment.

3. Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta $r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que passa pel punt (1,1,2). Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

En primer lloc cal trobar un vector director de la recta, ja sigui escrivint l'equació paramètricament o per altres mètodes. Així, per exemple, l'equació de la recta es pot escriure

$$r : (x, y, z) = (0, -1, -2) + t(1,1,-1)$$

i el vector és, llavors, $(1,1,-1)$.

L'equació del pla és $\pi: x-1+y-1-(z-2)=0$ o bé, simplificant, $\pi: x+y-z=0$. És evident que el pla passa per l'origen de coordenades i, per això, la distància del $(0,0,0)$ al pla val zero.

0.5 punts pel càlcul del vector director.
1 punt per l'equació del pla.
0.5 punts per justificar que la distància val zero.

4. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 4 & 1 & -m\\ 0 & m & 3\end{pmatrix}$. Determineu els valors de m per als quals

   $\operatorname{rang}(A)<3$.

   Pot ser $\operatorname{rang}(A)=1$ per algun valor de m?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 4 & 1 & m\\ 0 & m & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4-m\\ 0 & m & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4-m\\ 0 & 0 & 3-4m+m^2\end{pmatrix}.$$

Si $m^2-4m+3=0$, és a dir, si $m=1$ o $m=3$, $\operatorname{rang}(A)=2<3$.

Tal com es veu a les dues primeres files, el rang no pot valer 1 ja que mai poden ser proporcionals.

1 punt per l'esglaonament de les matrius. Si es calcula el determinant, cal comptar també 1punt.
0.5 punts per determinar els valors que proporcionen rangs inferiors a 3.
0.5 punts per justificar que el rang no pot valer 1.

PROBLEMES

5. Donada la funció $f(x)=e^{-x^2+2x}$,

   a) trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos;

   b) trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius;

   c) trobeu les possibles asímptotes;

   d) feu la representació gràfica de la funció.

a) El domini de la funció és tot $\mathbb{R}$.

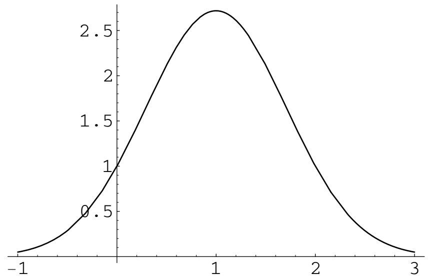
Com que $e^{-x^2-2x}=0$ no té solució, la funció no talla l'eix horitzontal.

Donat que $f(0)=1$, la funció talla l'eix vertical en el punt $(0,1)$.

b) La derivada és $f'(x)=e^{-x^2+2x}(-2x+2)=2e^{-x^2+2x}(1-x)$. Llavors, la derivada només s'anul·la quan $x=1$. Per qualsevol valor de x inferior a 1 la derivada és positiva i en qualsevol superior és negativa; per tant, la funció creix a $(-\infty,1)$, decreix a $(1,\infty)$ i, com a conseqüència, el punt $(1,e)$ és un màxim relatiu.

c) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+2x} = 0$. Per això $y=0$ és asímptota horitzontal en ambdós costats. La funció no té altres asímptotes.

d) La representació gràfica és



1 punt cada apartat.

6. Considereu la recta $r: \begin{cases} 2x-5y-z-3=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases}$ i el pla $p: 2x-y+az+2=0$ on a és un paràmetre.
   a) Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
   b) Quin ha de ser el valor d'a perquè la recta i el pla siguin paral·lels.
   c) Esbrineu si existeixen valors d'a pels quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu calculeu-los.
   d) Esbrineu si existeixen valors d'a pels quals la recta i el pla formin un angle de 30º. En cas afirmatiu calculeu-los.

a) La recta es pot expressar en forma paramètrica com

$$r: (x,y,z) = (-1,-1,0) + t(2,1,-1).$$

Així, un vector director és $\vec{v} = (2,1,-1)$.

Un vector perpendicular al pla, en funció d'a, és $\vec{w} = (2,-1,a)$.

b) La recta i el pla seran paral·lels quan $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin perpendiculars, és a dir, quan $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$. Llavors, $(2,1,-1)\cdot(2,-1,a) = 3-a = 0$ i, quan el paràmetre val 3 la recta i el pla són paral·lels.

c) De forma anàloga, la recta i el pla seran perpendiculars quan els dos vectors siguin paral·lels, però això no pot passar ja que no hi ha cap valor d'a que permeti que

$$\frac{2}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{a}{-1}.$$

d) Ara cal que els vectors formin un angle α de 60° o bé de 120°. Utilitzant el producte escalar,

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\alpha,$$

$$3-a = \sqrt{6}\sqrt{5+a^2}\left(\pm\frac{1}{2}\right),$$

$$a^2 + 12a - 3 = 0\,,$$

$$a = -6 \pm \sqrt{39}\,.$$

1 punt cada apartat.