SÈRIE 3.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$. Es demana:
a) calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$;
b) existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f(x)$ que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** El punt de tangència és $(3, f(3)) = (3,8)$. El pendent de la recta tangent és $f'(3)$. Com que $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, $f'(3) = 11$.
L'equació de la tangent és

$$y - 8 = 11 \cdot (x - 3).$$

Arreglada queda com

$$11x - y - 25 = 0.$$

Accepteu com a correcta l'equació sense arreglar.

b) **[1 punt]** En cas d'existir, ha de ser tangent en un punt on $f'(x) = 11$. Resolem l'equació $3x^2 - 6x + 2 = 11$ i obtenim $x = 3$ (que ja teníem) i $x = -1$. Per tant, la recta tangent en el punt $(-1, f(-1)) = (-1,-4)$ és paral·lela a l'anterior. La seva equació és

$$y + 4 = 11 \cdot (x + 1)$$

que, un cop arreglada, queda com

$$11x - y + 7 = 0.$$

Accepteu com a correcta l'equació sense arreglar. Puntueu 0,25 punts si reconeixen que la nova tangent ha de tenir pendent 11.

2. Donada la funció $f(x) = \cos x - \cos^3 x$, es demana:

a) trobeu la seva integral indefinida;

b) quina és la primitiva de $f(x)$ que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

Indicació. Recordeu que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

SOLUCIÓ.

a) **[1,5 punts]**

$$\int \left(\cos x - \cos^3 x\right) dx = \int \cos x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \int \cos x \cdot sin^2 x \, dx = \frac{sin^3 x}{3} + C.$$

b) **[0,5 punts]** Si la primitiva ha de passar pel punt $(\pi / 2{,}0)$,

$$\frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{3}.$$

La primitiva demanada és, doncs, $\dfrac{\sin^3 x - 1}{3}$.

3. Considereu la funció $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{6}{x^2}$ on a és un paràmetre.

a) Calculeu el valor del paràmetre a sabent que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 3$.

b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

SOLUCIÓ.

a) **[1,5 punts]** Hem de tenir $f'(3) = 0$. Ara, $f'(x) = -\dfrac{a}{x^2} - \dfrac{12}{x^3}$. O sigui que $f'(3) = \dfrac{-3a - 12}{27}$. Igualant a 0, tenim $a = -4$.

Puntueu 0,5 punts si fan bé la derivada.

b) **[0,5 punts]** Per veure el caràcter de l'extrem, calculem la derivada segona, $f''(x) = -\dfrac{8}{x^3} + \dfrac{36}{x^4}$. $f''(3) = \dfrac{4}{27} > 0$ per tant l'extrem és un mínim relatiu.

4. Considerem els punts de l'espai $A(1,1,0)$, $B(0,1,2)$ i $C(-1,2,1)$. Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:
a) aquests punts, estan alineats?
b) podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?
Raoneu adequadament les respostes.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Els tres punts no estan alineats perquè els vectors $\vec{AB}=(-1,0,2)$ i $\vec{AC}=(-2,1,1)$ són linealment independents (no són proporcionals).

b) **[1 punt]** Com que els tres punts no estan alineats, la solució del sistema d'equacions lineals no pot representar una recta. Ha de ser doncs un pla o tot l'espai (aquest últim cas, encara que tèoricament correcte, requeriria que la matriu dels sistema fos de rang 0, o sigui una matriu idènticament 0). Si la solució és un pla, el nombre de graus de llibertat del sistema és 2 i el rang de la matriu del sistema, 1: les tres equacions representen el mateix pla.

PROBLEMES

5. Donat el sistema

$$\begin{cases} \qquad\quad y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + (2m-2)z = m-1, \end{cases}$$

on m és un paràmetre, es demana:
a) discutiu el sistema segons els valors de m;
b) resoleu els casos compatibles;
c) en cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.

SOLUCIÓ.

a) **[1,5 punts]** Si el discutim a través del determinant del sistema,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{vmatrix} = 4\cdot(m-1);,$$

1) per $m \neq 1$, el sistema és compatible determinat.
2) per $m = 1$, el sistema queda reduït a dues equacions,

$$\begin{cases} y+z = 2 \\ -2x+y+z = -1, \end{cases}$$

el rang de la matriu del sistema és 2 i, per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

També es pot discutir tot observant que restant la segona equació de la primera s'obté $x = 3/2$. Substituint aquest valor a la tercera equació,

$$3(1-m)+2(m-1)z = m-1 \Rightarrow (m-1)z = 2(m-1).$$

Si $m \neq 1$, $z = 2$ i, substituint a la primera equació, $y = 0$. El sistema té, doncs, solució única: compatible determinat. De passada tenim la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 0; \quad z = 2.$$

Si $m = 1$, el valor de *z* queda indeterminat i, de la primera equació, $y = 2 - z$. El sistema té doncs, infinites solucions que depenen del valor de *z*: sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Tenim també la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 2 - z; \quad z = z.$$

Per últim, també es pot discutir per Gauss. Intercanviem l'ordre de les dues primeres equacions,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1 \end{pmatrix} \to \text{(tot suposant que } m \neq 1\text{)}$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 2m-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2m-2 & 4m-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O sigui que si $m \neq 1$ el sistema és compatible determinat.
El cas $m = 1$ porta a la matriu reduïda,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de rang 2.}$$

per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) **[1,5 punts]** El cas $m \neq 1$. La solució és $x = 3/2; \quad y = 0; \quad z = 2.$
El cas $m = 1$. La solució és $x = 3/2; \quad y = 2 - z; \quad z = z.$

Puntueu 0,5 punts la resolució del cas determinat i 1 punt la del cas indeterminat.

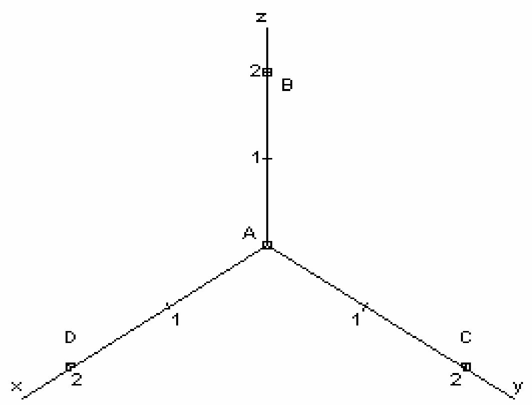
c) **[1 punt]** Cada equació representa l'equació d'un pla a l'espai.
En el cas $m \neq 1$, els tres plans es tallen en un únic punt.
En el cas $m = 1$, els dos plans que queden es tallen en una recta d'equació paramètrica

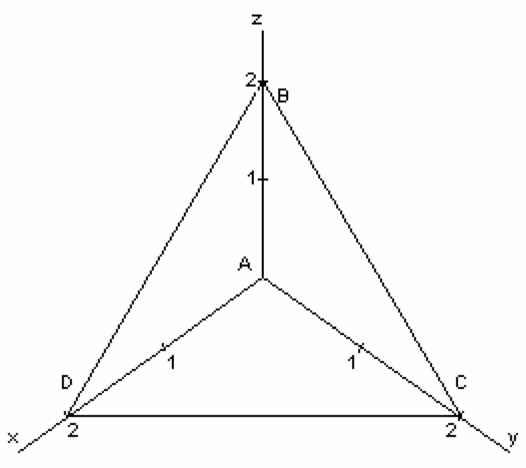
$$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 2 - s \\ z = s. \end{cases}$$

Puntueu 0,5 punts cada interpretació.

6. Tenim quatre punts a l'espai: $A(0,0,0)$; $B(0,0,2)$; $C(0,2,0)$ i $D(2,0,0)$. Es demana:
a) representeu gràficament els quatre punts;
b) calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular) $ABCD$;
c) trobeu l'equació del pla que passa per B, C i D;
d) calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

SOLUCIÓ.
a) **[0,5 punts]**





b) **[1,5 punts]**
A partir del gràfic, el volum del tetràedre es pot calcular directament com el volum de la piràmide de base el triangle rectangle ABC i altura 2:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}2 \cdot 2\right) \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Per calcular el volum del tetràedre, també es pot fer servir la fórmula que l'expressa com 1/6 del producte mixt dels vectors $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ (en valor absolut):

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-8}{6}$$, en

valor absolut, $\frac{4}{3}$.

c) **[1 punt]** L'equació general del pla que ens demanen és (prenem $(0,0,2)$ com punt base i $(0,2,-2);(2,0,-2)$ com vectors directors):

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 2 & 0 \\ z-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{; és a dir, } -4\cdot(x+y+z-2)=0\,.$$

El pla demanat té per equació general $x+y+z-2=0$.

Qualsevol altra forma d'equació també és acceptable.

d) **[1 punt]** La distància de l'origen al pla $x+y+z-2=0$ és, fent servir la fórmula de la distància d'un punt a un pla,

$$\left|\frac{-2}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

També es pot fer servir el fet que sabem el volum del tetràedre és 4/3 i que el mateix volum el podem calcular prenent com a base el triangle equilàter BCD, de costat $l=2\sqrt{2}$, i altura la distància que ens demanen, *d*. L'àrea del triangle és $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{8\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}$. Tenim doncs $\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot d=\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad d=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** El sistema reduït té dues equacions i tres incògnites. El rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada és 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) **[1 punt]** El sistema reduït és

$$\begin{cases} x + 2y - z & = & 0 \\ \quad y + 2z & = & 1. \end{cases}$$

Fent servir *z* com a incògnita secundària, la solució és pot expressar com

$$\begin{cases} x & = & 5z - 2 \\ y & = & 1 - 2z \\ z & = & z. \end{cases}$$

2. Considereu els punts de l'espai *A*(0,0,1), *B*(1,1,2) i *C*(0,-1,-1).
a) Trobeu l'equació del pla *ABC*.
b) Si *D* és el punt de coordenades (*k*,0,0), quant ha de valer *k* per tal que els quatre punts *A*, *B*, *C* i *D* siguin coplanaris?

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** L'equació del pla determinat per *A*, *B* i *C* és

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -x+2y-z+1=0.$$

(Hem fet servir *A* com a punt base i $\vec{AB}=(1,1,1)$ i $\vec{AC}=(0,-1,-2)$ com a vectors directors del pla). També són igualment vàlides les equacions vectorial o paramètrica:

$$(x,y,z)=(0,0,1)+s\cdot(1,1,1)+t\cdot(0,-1,-2); \qquad \begin{cases} x &= s \\ y &= s-t \\ z &= 1+s-2t \end{cases}$$

b) **[1 punt]** Substituint *x*, *y* i *z* per les coordenades del punt *D*(*k*,0,0) a l'equació general obtenim -*k*+1=0. Per tant *k*=1. El punt *D*(1,0,0) és coplanari amb *A*, *B* i *C*.

Això mateix es pot fer amb l'equació vectorial o paramètrica del pla trobant el valor dels paràmetres *s* i *t* que fan compatible el sistema:

$$\begin{cases} k &= s \\ 0 &= s-t \\ 0 &= 1+s-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow k=1.$$

També es pot estudiar la coplanarietat dels quatre punts exigint que el determinant d'ordre 4 següent valgui 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Arribem a *k*=1.

3. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una matriu X que compleixi $A \cdot X + A = B$.

SOLUCIÓ.

[2 punts] La matriu *X* només pot ser quadrada d'ordre 2. El problema es pot resoldre directament, fent $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i efectuant $A \cdot X + A$ i igualant a *B*. S'obté el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2a + c & = & -1 \\ a + c & = & 1 \\ 2b + d & = & 1 \\ b + d & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 3 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

També és pot resoldre directament l'equació matricial:

$$AX + A = B \Rightarrow AX = B - A \Rightarrow X = A^{-1}(B - A)$$

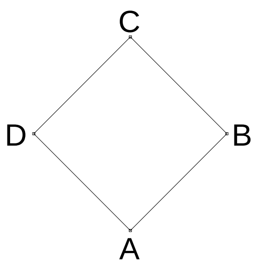
La inversa de *A* és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ara,

$$X = A^{-1}(B - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puntueu 1 punt si es planteja correctament el sistema o s'obté X correctament aïllada. L'altre punt per la resolució correcta.

4. Els punts $A(k-3, 2, 4)$, $B(0, k+2, 2)$ i $C(-2, 6, k+1)$ són tres dels vèrtexs d'un rombe *ABCD* (vegeu la figura).



Es demana:
a) calculeu el valor de k ;
b) demostreu que el rombe és un quadrat.

SOLUCIÓ.
a) **[1 punt]** Si el paral·lelogram *ABCD* és un rombe, *d(A,B)=d(B,C)*:

$$\sqrt{(k-3)^2 + k^2 + 4} = \sqrt{4 + (4-k)^2 + (k-1)^2} \quad \Rightarrow k = 2.$$

b) **[1 punt]** El rombe és un quadrat atès que els vectors $\vec{AB} = (1, 2, -2)$ i $\vec{BC} = (-2, 2, 1)$ (o un altre parell adequat, *AB*, *AD*, etc.) són perpendiculars:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0.$$

També es pot fer per Pitàgores aplicat a un dels triangles *ABC*, *ABD*, etc.

PROBLEMES

5. Considerem la funció $f(x) = x^3 + mx^2 + 1,\ m \geq 0.$
a) Calculeu el valor de *m* per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix *OX* i les rectes *x*=0 i *x*=2 sigui de 10 unitats quadrades.
b) Per a *m*=1, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45º amb el semieix positiu de *OX*.

SOLUCIÓ.

a) **[2 punts]** La funció es manté positiva per sobre de l'interval $[0,2]$ perquè per $x \geq 0$ i $m \geq 0$ forçosament $x^3 + mx^2 + 1 \geq 1$. Alternativament es pot raonar que $f(x)$ es manté positiva a l'interval $[0,2]$ perquè $f(0) = 1$ i $f'(x) = 3x^2 + 2mx \geq 0$ per $x \in [0,2]$ (recordem que $m \geq 0)$.
En conseqüència, l'àrea del recinte que ens diu l'enunciat és

$$\int_0^2 \left(x^3 + mx^2 + 1\right) dx = \frac{x^4}{4} + m\frac{x^3}{3} + x\Bigg|_0^2 = 6 + \frac{8m}{3}.$$

Així,

$$6 + \frac{8m}{3} = 10 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{2}.$$

Valoreu 0,5 punts el raonament que $f(x) \geq 0$ *a l'interval* $[0,2]$.

b) **[2 punts]** Per *m*=1 la funció és $f(x) = x^3 + x^2 + 1.$ El pendent de la recta tangent que ens diuen ha de ser igual a 1. Per tant, el punt o punts que ens demanen han de ser aquells on $f'(x) = 3x^2 + 2x = 1.$ O sigui $x = -1$ i $x = 1/3$. Els punts en qüestió són $(-1,1)$ i $\left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)$.

Valoreu amb 0,5 punts el fet el pendent de la recta és 1.
Si la resposta es limita a donar $x = -1$ *i* $x = 1/3$ *doneu-la per bona.*

6. Donats la funció $f(x)=\sqrt{x}$ i el punt *A*(2,0) situat sobre l'eix de les abscisses, es demana:
a) trobeu la funció que expressa la distància del punt *A* a un punt qualsevol de la gràfica de la funció;
b) trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a *A*.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Un punt qualsevol de la gràfica de la funció és $\left(x,\sqrt{x}\right)$. La distància a *A* és:

$$d(x)=\sqrt{(x-2)^2+x}=\sqrt{x^2-3x+4}\,.$$

b) **[3 punts]** El punt que ens demanen ha de fer mínima la funció *d(x)*:

$$d'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}=0\Rightarrow 2x-3=0\quad\Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

[També es pot calcular el punt on s'assoleix el mínim de la funció $d^2(x)$.]

En aquest punt hi ha un mínim de *d(x)* atès que per $x<\frac{3}{2},\ d'(x)<0$ i per $x>\frac{3}{2},\ d'(x)>0$. El criteri de la segona derivada porta a la mateixa conclusió:

$$d''(x)=\frac{7}{4\left(x^2-3x+4\right)^{3/2}};\quad d''\left(\frac{3}{2}\right)>0\,.$$

Per tant el punt demanat és $\left(\frac{3}{2},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Puntueu 2 punts per trobar correctament el valor x=3/2 i 1 punt per la comprovació de mínim.