

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu). En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què és el que voleu fer i per què. Puntuació de cada qüestió: 2 punts. Total qüestions:  $3 \times 2 = 6$  punts. Problema: 4 punts.

### QÜESTIONS

1. Considereu la funció  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ .
- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 3$ .
  - Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts]

2. Donada la funció  $f(x) = \cos x - \cos^3 x$ :
- trobeu la seva integral indefinida;
  - quina és la primitiva de  $f(x)$  que passa pel punt  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ?

**Indicació:** recordeu que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 0,5 punts. Total 2 punts]

3. Considereu la funció  $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$  on  $a$  és un paràmetre.
- Calculeu el valor del paràmetre  $a$  sabent que  $f(x)$  té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 3$ .
  - Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 0,5 punts. Total 2 punts]

4. Considerem els punts de l'espai  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 2)$  i  $C(-1, 2, 1)$ . Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:
- aquests punts, estan alineats?
  - podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?

Raoneu adequadament les respostes.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts]

## PROBLEMES

5. Donat el sistema

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2 - 2m)x + (2m - 2)z = m - 1, \end{cases}$$

on  $m$  és un paràmetre:

- discuti el sistema segons els valors de  $m$ ;
- resoleu els casos compatibles;
- en cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1 punt. Total 4 punts]

6. Tenim quatre punts a l'espai:  $A(0, 0, 0)$ ;  $B(0, 0, 2)$ ;  $C(0, 2, 0)$  i  $D(2, 0, 0)$ . Es demana:

- representeu gràficament els quatre punts;
- calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular)  $ABCD$ ;
- trobeu l'equació del pla que passa per  $B$ ,  $C$  i  $D$ ;
- calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

[Puntuació: apartat a) 0,5 punts; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1 punt; apartat d) 1 punt. Total 4 punts]

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu). En les respostes que doneu heu d'explicar sempre què és el que voleu fer i per què. Puntuació de cada qüestió: 2 punts. Total qüestions:  $3 \times 2 = 6$  punts. Problema: 4 punts.

### QÜESTIONS

1. La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.  
 b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

2. Considereu els punts de l'espai  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 1, 2)$  i  $C(0, -1, -1)$ .

- a) Trobeu l'equació del pla  $ABC$ .  
 b) Si  $D$  és el punt de coordenades  $(k, 0, 0)$ , quant ha de valer  $k$  per tal que els quatre punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  siguin coplanaris?

[2 punts]

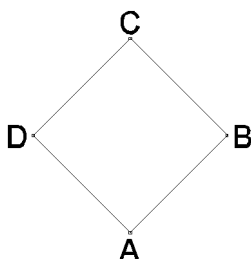
3. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una matriu  $X$  que compleixi  $A \cdot X + A = B$ .

[2 punts]

4. Els punts  $A(k-3, 2, 4)$ ,  $B(0, k+2, 2)$  i  $C(-2, 6, k+1)$  són tres dels vèrtexs d'un rombe  $ABCD$  (vegeu la figura).



- a) Calculeu el valor de  $k$ .  
 b) Demostreu que el rombe és un quadrat.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

## PROBLEMES

5. Considereu la funció  $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ ,  $m \geq 0$ .

- Calculeu el valor de  $m$  per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix  $OX$  i les rectes  $x = 0$  i  $x = 2$  sigui de 10 unitats quadrades.
- Per a  $m = 1$ , indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de  $45^\circ$  amb el semieix positiu de  $OX$ .

[Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 2 punts. Total: 4 punts]

6. Donats la funció  $f(x) = \sqrt{x}$  i el punt  $A(2, 0)$  situat sobre l'eix de les abscisses:

- Trobeu la funció que expressa la distància del punt  $A$  a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.
- Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de  $f(x)$  més proper a  $A$ .

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]