SÈRIE 3

1. Una fàbrica de mobles de cuina ven 1000 unitats mensuals d'un model d'armari a 200 euros per unitat. Per tal de reduir-ne l'estoc, fa una oferta als compradors i estima que, per cada euro de reducció del preu, les vendes mensuals del producte s'incrementaran en 100 unitats.

   (a) Quantes unitats caldrà vendre per a d'obtenir el màxim d'ingressos mensuals? (1,5 punts)

   Si anomenem x a la reducció del preu de venda en euros, aleshores la funció que ens dóna els beneficis serà $B(x) = (200 - x) \cdot (1000 + 100x) = -100x^2 + 19000x + 200000$. La seva derivada és $B'(x) = -200x + 19000$, que val 0 quan $x = 95$. Com que la funció és una paràbola amb coeficient del terme quadràtic negatiu, aquest valor correspon a un màxim: els ingressos màxims s'obtindran quan es redueixi el preu en 95 euros, és a dir, quan el nombre d'unitats venudes sigui $1000 + 100 \cdot 95 = 10500$ unitats.

   (b) A quant pujaran aquests ingressos? (0,5 punts)

   La quantitat màxima ingressada serà $B(95) = 1102500$ euros.

2. Sigui la funció

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   (a) Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu-ne i classifiqueu els extrems relatius. (1 punt)

   $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. El denominador és sempre positiu. Per tant, quan $x < 0$ f' és positiva, i la funció és creixent, mentre que quan $x > 0$ f' és negativa, i la funció és decreixent. En conseqüència, l'únic punt estacionari és $x = 0$, que correspon a un màxim relatiu.

   (b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 1$. (1 punt)

   $f(1) = \dfrac{1}{2}$ i $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$. Per tant, la recta és $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x-1)$.

3. Sigui el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y + z &=& 0 \\ 3x + 4y - 5z &=& 6 \\ x - y &=& 2 \end{array}\right\}$$

   (a) Justifiqueu si és compatible determinat. (1 punt)

   $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$. Tant la matriu associada com l'ampliada són de rang 3. Per tant, el sistema és compatible determinat.

   (b) Resoleu el sistema format per les dues primeres equacions. (1 punt)

   De $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right)$ obtenim $x = \dfrac{y+6}{8}$, $y = y$, $z = \dfrac{7y-6}{8}$. Si parametritzem per z obtenim $x = \dfrac{z+6}{7}$, $y = \dfrac{8z+6}{7}$, $z = z$.

4. Durant la darrera epidèmia d'Ebola es va considerar que, sense cap intervenció, el virus es propagava augmentant en un 3% diari el nombre d'afectats. Suposeu que, en una població, avui, hi ha 25 persones infectades.

   (a) Escriviu la fórmula de la funció que dóna el nombre de persones infectades en passar els dies. Quantes persones estaran infectades al cap de 20 dies? (1 punt)

   La funció és $f(x) = 25 \cdot 1{,}03^x$. Al cap de 20 dies el nombre de persones infectades serà $f(20) = 25 \cdot 1{,}03^{20} = 45$ o 46 persones infectades.

   (b) A partir d'una data determinada, en aquesta població s'apliquen unes mesures sanitàries que permeten que el nombre de persones infectades disminueixi segons la funció $g(x) = 1000 \cdot (0.95)^x$.

Si considerem controlada l'epidèmia quan el nombre d'afectats és igual o inferior a 10 persones, quants dies hauran de passar després d'aplicar les mesures sanitàries per a poder declarar controlada l'epidèmia? (1 punt)

$1000 \cdot (0.95)^x = 10 \rightarrow 0,95^x = 0,01 \rightarrow x = \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,95} = 89.78...$ L'epidèmia estarà controlada passats 89 dies.

5. La butlleta guanyadora d'una loteria està formada per tres nombres. Sabem que la suma del primer i el segon excedeix en dues unitats al tercer; que el primer nombre menys el doble del segon és deu unitats menor que el tercer, i que la suma dels tres nombres és 24. Quina és la butlleta guanyadora? (2 punts)

Si anomenem als tres nombres x, y i z respectivament, les dades del problema es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-2 &=& z \\ x-2y+10 &=& z \\ x+y+z &=& 24 \end{array}\right\}$$

que, resolt per qualsevol mètode, dóna com a solucions $x = 9$, $y = 4$, $z = 11$.

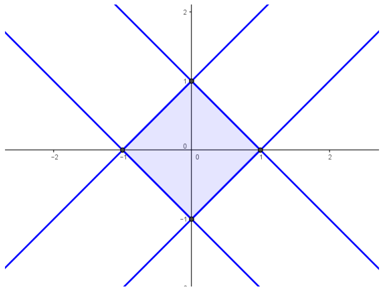
6. Tenim quatre rectes: la recta r_1 passa pels punts $(-1, 0)$ i $(0, 1)$; la recta r_2 passa per $(-1, 0)$ i $(0, -1)$. r_3 passa per $(1, 0)$ i per $(0, 1)$. Finalment, r_4 passa per $(1, 0)$ i $(0, -1)$.

(a) Escriviu les inequacions que compleixen els punts de la frontera i de l'interior del quadrat que determinen aquestes quatre rectes i dibuixeu-lo. (1 punt)

Les inequacions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} y &\le& x+1 \\ y &\ge& x-1 \\ y &\le& -x+1 \\ y &\ge& -x-1 \end{array}\right\}.$$

Gràficament, el quadrat és:



(b) Determineu el valor màxim de k que fa que la recta $y = 2x + k$ tingui algun punt en comú amb el quadrilàter anterior. (1 punt)

El valor màxim, i el mínim, de k es donarà en un dels vèrtexs del quadrat. Si posem $k = y - 2x$ Tindrem que $k(-1, 0) = 2$, $k(1, 0) = -2$, $k(0, 1) = 1$, $k(0, -1) = -1$. Per tant, el valor màxim és $k = 2$. També es pot veure gràficament: