SÈRIE 2

1. Un arbre té un volum de 30 m^3 i, per la qualitat de la seva fusta, es ven a 50 € per metre cúbic. Cada any l'arbre augmenta el volum en 5 m^3. Alhora, la qualitat de la fusta disminueix, i també el preu, que cada any és un euro per metre cúbic més barat. D'aquí a quants anys aconseguirem el màxim d'ingressos per la venda de la fusta de l'arbre? Quins seran aquests ingressos? *[2 punts]*

   Anomenem x la quantitat d'anys que passen des del moment inicial. El volum de l'arbre al cap de x anys, expressat en m^3, serà V(x) = 30 + 5x. El preu de la fusta de l'arbre al cap de x anys, expressat en €/m^3, serà P(x) = 50 – x. L'ingrés que prové de la fusta de l'arbre al cap de x anys, expressat en euros, serà I(x) = V(x)·P(x):

   $$I(x) = (30 + 5x)(50 - x) = 1500 + 220x - 5x^2$$
   $$I'(x) = 220 - 10x$$
   $$I'(x) = 0 \text{ quan } x = 22.$$

   A més, aquesta derivada és positiva quan x < 22 i negativa després. Per tant, es tracta d'un màxim.

   L'ingrés màxim de la fusta es donarà al cap de 22 anys. Quan això passi, aquest ingrés màxim serà de $I(22) = 1500 + 220\cdot 22 - 5\cdot 22^2 = 3920$ €.

---

2. En resoldre un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites, *x, y*, *z*, hem trobat que les solucions compleixen les condicions següents:
   - La suma de les solucions és 6.
   - La segona és la mitjana aritmètica de les altres dues.
   - El valor de la tercera és la suma dels valors de les altres dues.

   Escriviu el sistema d'equacions que satisfà les condicions anteriors, resoleu-lo i indiqueu si és compatible determinat o indeterminat. *[2 punts]*

   El sistema és aquest: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \\ z=x+y \end{array}\right\}$. Es pot resoldre directament, o pel mètode de Gauss, i obtenim x = 1, y = 2, z = 3. Per tant, el sistema és compatible determinat.

3. Considerem la funció $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-x+2}$.
    a. Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt de tall amb l'eix de les ordenades. *[1 punt]*
    b. Determineu els punts de la corba en els que la recta tangent és horitzontal. *[1 punt]*

a. f(0) = 1; el punt on la gràfica de f talla l'eix d'ordenades és (0,1). A més, $f'(x)=\dfrac{-2x^2-4x+6}{\left(x^2-x+2\right)^2}$. Per tant, $f'(0)=\dfrac{3}{2}$. La recta tangent en (0,1) serà, per tant, $y=\dfrac{3}{2}x+1$.

b. $f'(x)=0 \rightarrow -2x^2-4x+6=0 \rightarrow x=-3, x=1$. A més, $f(-3)=-\dfrac{2}{7}$ i $f(1)=2$. Per tant, els punts on la recta tangent a la corba és horitzontal són $\left(-3,-\dfrac{2}{7}\right)$ i $(1,2)$.

4. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculeu les matrius A + B i A · B. *[1 punt]*
   b. Determineu els valors de *a*, *b* i *c* que fan A + B = A · B. *[1 punt]*

a. $A+B=\begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}$ $A\cdot B=\begin{pmatrix} b+a & c+a \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$.

b. A + B = A · B ens porta al sistema: $\left.\begin{array}{r} 1+b=b+a \\ a+c=c+a \\ 3=2b-a \\ 1-a=2c-a \end{array}\right\}$, que té com a solució

$a=1, b=2, c=\dfrac{1}{2}$.

---

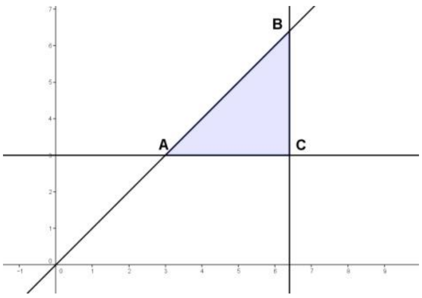
5. La funció derivada d'una funció *f* és $f'(x)=e^{-2x}\cdot(x-x^2)$.
   a. Estudieu el creixement i el decreixement de la funció *f*. *[1 punt]*
   b. Si la funció *f* té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los. *[1 punt]*

a. La variació de la funció *f* vindrà donada pel signe de *f'*. Com que l'exponencial és sempre estrictament positiva, aquest signe depèn només del factor polinòmic, que és positiu quan *x* està comprès entre 0 i 1. Per tant, *f* és estrictament creixent a $(0,1)$, i estrictament decreixent a $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció *f* té un mínim relatiu a x = 0 i un màxim relatiu a x = 1.

---

6. Una refineria de petroli produeix gasolina i gasoil. En el procés de refinació que s'hi porta a terme s'obté més gasolina que gasoil. A més, per a cobrir la demanda cal produir com a mínim 3 milions de litres de gasoil al dia, mentre que la demanda de gasolina és de 6,4 milions de litres al dia, com a màxim.
La gasolina té un preu d'1,9 €/L, i el gasoil val 1,5 €/L. Tenint en compte que es ven la totalitat de la producció, determineu quants litres de gasolina i de gasoil cal produir al dia per a obtenir el màxim d'ingressos. *[2 punts]*



Anomenarem *x* als milions de litres de gasolina, i *y* als milions de litres de gasoil. Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{c} x \geq y \\ y \geq 3 \\ x \leq 6,4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

. La funció objectiu serà, en milions d'euros, $I(x,y) = 1,9x + 1,5y$. Els vèrtexs són: A(3,3), B(6.4,6.4) i C(6.4,3). Els ingressos respectius són: $I(A) = 10,2$, $I(B) = 21,76$, $I(C) = 16,6$. Per tant, el màxim benefici s'obtindrà amb la producció de 6,4 milions de litres de cada tipus de carburant.

Una altra interpretació és considerar $x > y$. En aquest cas no existeix màxim de I(x,y) a la regió factible.

SÈRIE 4

---

1. El mes de gener passat, en Joan, la Carla i la Laura van invertir en borsa. La Carla va invertir el doble que la Laura. Aquell mes, en Joan i la Carla van tenir uns guanys del 30 %, mentre que la Laura va tenir unes pèrdues del 10 %. De resultes d'això, van obtenir conjuntament uns guanys del 20 %. Van acordar tornar a invertir el febrer, incrementant cadascú un 10 % les seves inversions inicials. Si el mes de febrer van invertir entre tots tres 770 €, quina quantitat havia invertit cadascú el mes de gener? [2 punts]

Anomenarem x, y z, les inversions al mes de gener d'en Joan, la Carla i la Laura, respectivament. Les dades del problema es tradueixen, doncs, en el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{ccc} y & = & 2z \\ 0,3x+0,3y-0,1z & = & 0,2(x+y+z) \\ 1,1(x+y+z) & = & 770 \end{array}\right\}$$

que, en resoldre'l per qualsevol mètode, ens dóna x = 175, y = 350, z = 175. Per tant, en Joan va invertir 175 €, la Carla 350 € i la Laura 175 €.

---

2. La funció derivada d'una funció f és $f'(x)=(x-5)\cdot e^{-2x}$.

   a. Si en té, determineu i classiqfiqueu els extrems de la funció f. [1 punt]
   La part exponencial és sempre estrictament positiva. Per tant, l'únic extrem és x = 5. Com que la derivada és negativa abans d'aquest valor i positiva després, aquest és un mínim.

   b. Sabem que la gràfica de f passa per P(0,2). Calculeu l'equació de la recta tangent a f en el punt P. [1 punt]
   $f'(0)=-5$. Per tant, l'equació de la recta tangent serà $y=-5x+2$.

---

3. El preu, expressat en milers d'euros, del robí africà és el doble del quadrat del seu pes en grams, mentre que el preu del robí tailandès és quatre vegades el cub del seu pes en grams. Ens han enviat un paquet amb dos robins, un de cada classe, que en total pesen 2 grams.

   a. Si els dos robins pesessin el mateix, quin preu hauríem de pagar? [1 punt]

   La funció que ens dóna el preu d'un robí de cada classe, de x grams, és:

   $$P(x) = 2x^2 + 4x^3 .$$

   Per tant, P(1) = 6. Pagarem 6000 €.

   b. Quant ha de pesar cada robí perquè el preu del paquet sigui mínim? Quin és aquest preu mínim? [1 punt]

   Si anomenem x al pes del robí tailandès, tindrem:

   $$P(x) = 2(2-x)^2 + 4x^3 = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 8 .$$

   D'aquí $P'(x) = 12x^2 + 4x - 8 = 4(x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$, que s'anul·la quan x = -1 i quan x = 2/3. Com que abans d'aquest valor P' < 0 i després és P' > 0, x = 2/3 correspon a un mínim. Per tant, e4l tailandès hauria de pesar 2/3 de gram, i l'africà 4/3 de gram. El preu, en aquest cas, serà $P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{128}{27} \approx 4.74$ mil·lers d'euros.

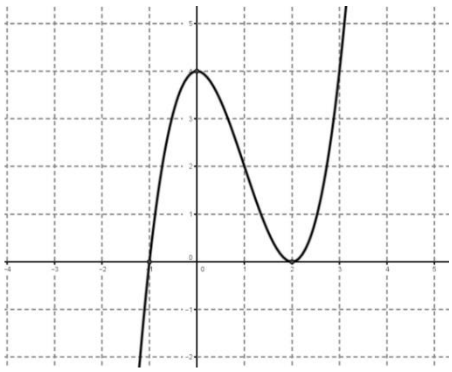
---

4. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu la matriu *X* que compleix $X \cdot A + B^2 = 2 \cdot I_2$, on $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 2. [2 punts]

Aïllant la matriu X obtenim $X = \left(2 \cdot I_2 - B^2\right) \cdot A^{-1}$. Fent els càlculs obtenim $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i, d'aquí obtenim $X = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -\frac{7}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

---

5. La gràfica adjunta mostra la funció f', derivada d'una funció f.



   a. Determineu en quins intervals la funció f és creixent, i en quins és decreixent. Si n'hi ha, classifiqueu els extrems de la funció f. [1 punt]

   f és creixent quan f' > 0, és a dir, a l'interval $(-1,+\infty)$. Serà decreixent a $(-\infty,-1)$. Per tant, l'únic extrem de la funció és x = -1, que correspon a un mínim.

   b. Indiqueu per a quins valors de x la recta tangent a f és horitzontal. [1 punt]

   f'(x) = 0, a x = -1 i a x = 2. Per tant, en aquests dos punts la recta tangent serà horitzontal.

---

6. Considereu el triangle de vèrtexs A(-2,0), B(0,3) i C(2,-1).

   a. Determineu les condicions que ha de complir un punt per a no ser fora del triangle. [1 punt]

   Recta AB: $y=\frac{3}{2}x+3$. Recta BC: $y=-2x+3$. Recta AC: $y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$. Per tant, cal que es verifiqui: $\left.\begin{array}{r} y\le\frac{3}{2}x+3 \\ y\le-2x+3 \\ y\ge-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \end{array}\right\}$.

   b. Justifiqueu analíticament si els punts P(1,1), Q(-1,1) i R(-1,2) són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle. [1 punt]

   L'interior del triangle està format pels punts que verifiquen
   - P pertany a la recta BC.
   - Q verifica les tres inequacions. Per tant, és interior al triangle.
   - R no verifica la primera inequació. Per tant, és exterior al triangle.