SÈRIE 3

1. En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
    a. Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells. *[1 punt]*
    b. Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63 €, quant ha gastat cadascú? *[1 punt]*

a. Anomenarem x als diners que ha gastat en Pol, y als que ha gastat la Júlia i z als que ha gastat la Maria. Les dades es tradueixen amb el sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{z}{2} \\ x = 3y \end{cases}.$$

Tenim tres incògnites i dues equacions. Per tant, no podem determinar el que ha gastat cadascú.

b. Ara el sistema d'equacions es converteix en:

$$\begin{cases} y = z/2 \\ x = 3y \\ x + y + z = 63 \end{cases},$$

que té com a solucions x = 31,5 , y = 10,5 , z = 21. Per tant, en Pol ha gastat 31,5 €, la Júlia ha gastat 10,5 € i la Maria ha gastat 21 €.

---

2. La gràfica de la derivada f' de la funció f és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts (5,0) i (1,0), i té el vèrtex en el punt (3,-4).
    a. Expliqueu raonadament en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los. *[1 punt]*
    b. Sabem que f(3)=2. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt (3,2). *[1 punt]*

a. Amb aquestes dades podem afirmar que f' és positiva i, per tant, f és creixent, a $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ i f' és negativa i, per tant, f és decreixent, a l'interval $(1,5)$. En conseqüència, f té un màxim a x = 1 i un mínim a x = 5.

b. f'(3) = -4, que serà el pendent de la recta tangent que ens demanen. A més, (3,2) és el punt de tangència; la recta és $y-2=-4(x-3)$ o bé $y=-4x+14$.

---

3. Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17:00 h a les 21:00 h. El percentatge d'audiència *P* de la primera emissió en funció del temps *t,* mesurat en hores, és definit per la funció

$$P(t)=\frac{1}{5}\left(-t^3+49t^2-760t+3690\right) \qquad 17\le t\le 21$$

Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20 %.

a. Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir. *[1 punt]*

b. En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta. *[1 punt]*

a. $P'(t)=\frac{1}{5}(-3t^2+98t-760)$ si $17\le t\le 21$. L'únic valor positiu de l'interval que fa zero aquesta derivada és t = 20. A més, P'(t) és positiva quan t < 20, i és negativa quan t > 20. Per tant, la funció té un màxim relatiu a t = 20. Tindrem, doncs, que el percentatge d'audiència va augmentar de les 17:00 h. fins a les 20:00 h., i va disminuir de les 20:00 h. a les 21:00 h.

b. Hem vist a l'apartat anterior que P té un màxim relatiu quan $t=20$, amb un percentatge d'audiència de $P(20)=18\%$. El signe de la derivada ens diu que $P(17)$ i $P(21)$ són menors que $P(20)$. Per tant, a les 20:00 h. s'aconsegueix el màxim absolut de percentatge d'audiència. En cap moment s'ha aconseguit, doncs, un percentatge igual o superior al 20% i per tant el programa es deixarà d'emetre.

---

4. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2-6A+5I=0$, on 0 és la matriu en què tots els elements són 0. *[2 punts]*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} x^2-6x+5 & 0 \\ 0 & x^2-6x+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

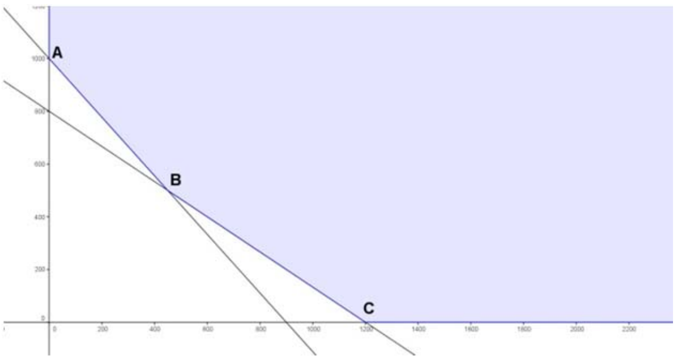
Resolent l'equació obtenim x = 1, x = 5.

---

5. Hem de fertilitzar els terrenys d'una finca utilitzant dos adobs A i B. El cost de l'adob A és de 0,9 €/Kg, i l'adob B costa 1,5 €/Kg. L'adob A conté un 20% de nitrogen i un 10% de fòsfor, mentre que l'adob B en conté un 18% i un 15%, respectivament. Per tal de fertilitzar els terrenys correctament ens cal un mínim de 180 kg de nitrogen i 120 Kg de fòsfor.
   a. Si anomenem x els kilograms d'adob A i y els kilograms d'adob B, escriviu el sistema d'inequacions que satisfà les condicions anteriors. *[1 punt]*
   b. Quina és la despesa mínima que hem de fer si volem fertilitzar els terrenys de la finca correctament? *[1 punt]*

a. El sistema és: $\left.\begin{array}{l} 0{,}2x+0{,}18y\geq 180 \\ 0{,}1x+0{,}15y\geq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

b. Els vèrtexs de la regió factible són $A(0,1000)$, B(450,500), C(1200,0). La regió factible és oberta. La funció objectiu és $z=0{,}9x+1{,}5y$, que ens els vèrtexs pren els valors $z(A)=1500$, $z(B)=1155$, $z(C)=1080$. Per tant, la despesa mínima serà de 1080 €, si fertilitzem amb 1200 Kg. de l'adob A.



6. Sigui la funció $f(x)=x\cdot e^x$.
   a. Si la funció f té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los. *[1 punt]*
   b. Calculeu la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = 0. *[1 punt]*

a. $f'(x)=e^x(1+x)$, que només s'anul·la quan x = -1. Com que la derivada és negativa quan x < -1 i és positiva quan x >-1, la funció f té un mínim a x = -1.

b. f(0) = 0, f'(0) = 1. Per tant, la recta tangent és y = x.

SÈRIE 4

1. El preu en Borsa d'unes accions ve donat per la funció $p(t) = 500 \cdot e^{0.3t}$, on t indica els anys transcorreguts a partir del moment present.
    a. Si venem les accions d'aquí a un any, quin serà el percentatge de benefici? *[1 punt]*
    b. D'aquí a quants anys haurem aconseguit doblar el preu de les accions? *[1 punt]*

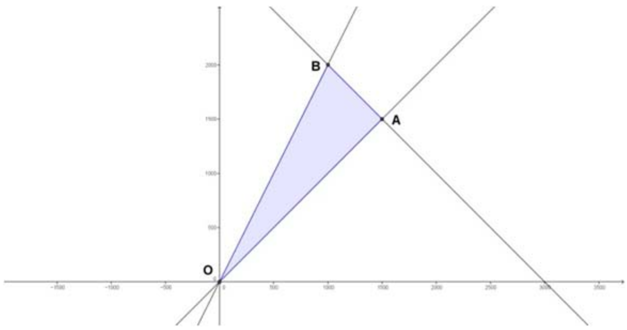
a. $p(0) = 500, p(1) = 674,93$. Per tant, el primer any les accions s'incrementen en 174,93 €, el que suposa un increment del $\frac{174,93}{500} \cdot 100 = 34,98\%$.

b. $500 \cdot e^{0.3t} = 1000 \rightarrow e^{0.3t} = 2 \rightarrow 0,3t = \ln 2 \rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,3} = 2,31$. Caldran més de 2 anys per a doblar el preu de les accions.

---

2. Una empresa d'informàtica fabrica ordinadors portàtils i de sobretaula i ven tots els que fabrica. L'empresa té capacitat per a fabricar 3000 ordinadors. Per qüestions de mercat, el nombre d'ordinadors de sobretaula no pot ser inferior a la meitat del nombre de portàtils, però tampoc pot superar el nombre de portàtils. L'empresa guanya 100 € per cada ordinador de sobretaula, i un 20% més en la venda de cada portàtil. Quants ordinadors de cada classe ha de fabricar per tal de maximitzar els seus beneficis? *[2 punts]*

Anomenarem x al nombre d'ordinadors de sobretaula, i y al de portàtils. Les restriccions que imposa el problema seran, doncs,



$$\left.\begin{array}{r} x + y \le 3000 \\ x \ge \dfrac{y}{2} \\ x \le y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

La representació gràfica de la regió factible és la que es veu al costat. Els seus vèrtexs són: O(0,0), A(1500,1500), B(1000,2000). La funció que ens dóna els guanys de l'empresa serà $G(x, y) = 100x + 120y$ que avaluada en els vèrtexs, ens dóna:

$$G(0,0) = 0$$
$$G(1500,1500) = 330000$$
$$G(1000,2000) = 340000$$

Per tant, els màxims guanys s'obtenen produint 1000 ordinadors de sobretaula i 2000 portàtils.

3. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
   a. Determineu una matriu X tal que A · X = I. *[1 punt]*
   b. Determineu una matriu Y tal que A · Y · A = B. *[1 punt]*

a. La matriu X que verifica la condició és la matriu inversa de A, que és $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

b. $A\cdot Y\cdot A=B \to Y=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -13\\ -5 & 8\end{pmatrix}$.

---

4. Els beneficis diaris, en centenars d'euros, d'un taller de bicicletes ve donat per la funció $f(x)=-20x^2+50x-20$, on x són els centenars de bicicletes que es venen. A més, el taller només té capacitat per a fabricar 200 bicicletes al dia.
   a. Calculeu el benefici màxim diari que poden obtenir. *[1 punt]*
   b. Determineu el mínim nombre de bicicletes que han de fabricar per a no tenir pèrdues. *[1 punt]*

a. $f'(x)=-40x+50$, que s'anul·la quan $x=\frac{5}{4}$. A més, com que la funció f és una paràbola amb el coeficient de x^2 negatiu, es tracta d'un màxim. Tenim doncs, $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{45}{4}=11{,}25$ centenars d'euros, és a dir, 1125 €.

b. Caldrà determinar els punts de tall de f amb l'eix d'abscisses, que són $x=\frac{1}{2}$ i x = 2.

Per tant, f(x) < 0 si $x<\frac{1}{2}$: tindran beneficis a partir de la fabricació de 50 bicicletes.

---

5. Considerem la funció $f(x)=\frac{3x-4}{2x-5}$.
   a. Indiqueu-ne el domini, i els punts on la gràfica de f talla l'eix d'abscisses. *[1 punt]*
   b. Si en té, trobeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f. *[1 punt]*

a. $\operatorname{Dom} f = R-\left\{\frac{5}{2}\right\}$ Els punts de tall són els que verifiquen f(x) = 0, és a dir, $x=\frac{4}{3}$.

b. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{3}{2}$; $y=\frac{3}{2}$ és asímptota horitzontal. $\lim_{x\to 5/2} f(x)=\infty$; f té asímptota vertical: la recta $x=\frac{5}{2}$.

---

6. Un botiguer vol determinar la quantitat de bitllets de 5 €, 10 € i 20 € que ha de tenir a la seva botiga per atendre millor els seus clients. En total vol tenir 90 bitllets i 1375 € a la caixa. A més, s'ha adonat que li convé tenir el doble de bitllets de 20 € que de 5 € i 10 € junts. Quants bitllets haurà de tenir de cada classe? *[2 punts]*

   Si anomenem x al nombre de bitllets de 5 €, y al nombre de bitllets de 10 € i z al nombre de bitllets de 20 €, les dades del problema es tradueixen en el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=90 \\ 5x+10y+20z=1375 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\}$$

   que, resolt pel mètode que vulguem, ens dóna x = 25, y = 5, z = 60. Per tant, caldrà que tingui 25 bitllets de 5 €, 5 bitllets de 10 € i 60 bitllets de 20 €,