SÈRIE 4

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

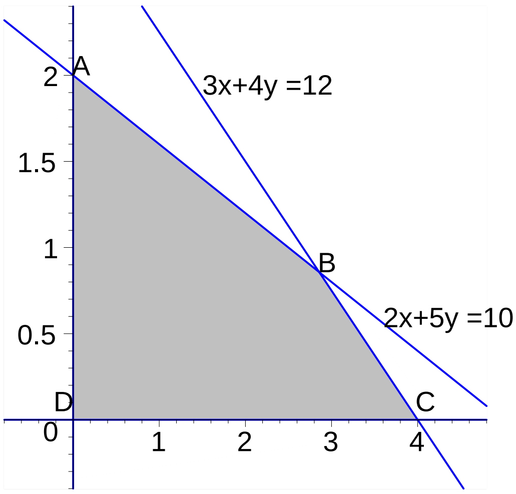
$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 2x+5y \leq 10 \\ 3x+4y \leq 12 \end{cases}$$

a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema. [1 punt]

b) Determineu el màxim de la funció $f(x,y)=x+3y$ que està sotmesa a les restriccions anteriors. [1 punt]

Solució:

a) La regió factible ve donada pel gràfic següent:



b) La taula de valors de $f(x,y)$ en els vèrtexs és:

	A(0,2)	B(20/7,6/7)	C(4,0)	D(0,0)
$f(x,y)=x+3y$	6	38/7	4	0
	màxim			

Per tant el màxim s'obté en el punt A(0,2) i té valor 6.

2. Un botiguer compra 10 televisors i 6 equips de música. D'acord amb el preu marcat hauria de pagar 10480 €. Com que paga al comptat, li fan un descompte del 5% en cada televisor i del 10% en cada equip de música, i només ha de pagar 9842 €. Quin és el preu marcat de cada televisor i de cada equip de música? [2 punts]

Solució: Siguin x i y els preus marcats dels televisors i equips de música, respectivament. Traduint les condicions a equacions tenim:

$$\left.\begin{array}{rcr} 10x+6y & = & 10480 \\ 10\cdot 0.95x+6\cdot 0.9y & = & 9842 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcr} 10x+6y & = & 10480 \\ 9.5x+5.4y & = & 9842 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcr} 5x+3y & = & 5240 \\ 5x+6y & = & 6380 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rcr} 5x+3y & = & 5240 \\ 0x+3y & = & 1140 \end{array}\right\}$$

D'on resulta $y=380$ i $x=820$.

3. Segons un estudi sobre l'evolució de la població d'una espècie protegida determinada, podem establir el nombre d'individus d'aquesta espècie durant els propers anys mitjançant la funció

$$f(t)=\frac{50t+500}{t+1}$$

En què t és el nombre d'anys transcorreguts.

a) Calculeu la població actual i la prevista d'aquí a 9 anys. [0.5 punts]
b) Determineu els períodes en què la població augmentarà i els períodes en que disminuirà. [1 punt]
c) Esbrineu si, segons aquesta previsió, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, si escau, determineu-lo. [0.5 punts]

Solució:

a) La població actual és de $f(0)=500$ individus, i la prevista per d'aquí a 9 anys és de $f(9)=95$ individus.
b) La derivada de $f(t)=\dfrac{50t+500}{t+1}$ és $f'(t)=-\dfrac{450}{(t+1)^2}$ que és negativa per a tot t; per tant la funció és decreixent i la població disminueix contínuament.
c) Com que el límit de $f(t)$ quan $t\rightarrow\infty$ és 50, la població tendirà a estabilitzar-se en 50 individus.

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z&=3\\ -x+y+2z&=1\\ 7x-10y+z&=a\end{aligned}\right\}$$

a) Digueu per a quins valors del paràmetre a el sistema és incompatible.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al valor de a per al qual el sistema és compatible i trobeu-ne una solució entera.
[1 punt]

Solució: Resolent per Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 3\\ -1 & 1 & 2 & | & 1\\ 7 & -10 & 1 & | & a\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 3\\ 0 & -1 & 5 & | & 4\\ 0 & 4 & -20 & | & a-21\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 3\\ 0 & 1 & -5 & | & 4\\ 0 & 0 & 0 & | & a-5\end{pmatrix}$$

a) Per tant, el sistema és incompatible per $a \neq 5$.

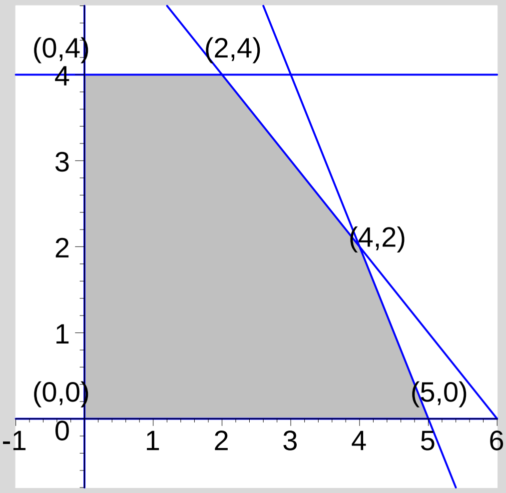
b) Per $a=5$ el sistema resultant és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 3\\ 0 & 1 & -5 & | & -4\end{pmatrix}.$$

La solució general és $y=-4+5z$, $x=3-3z+2y=-5+7z$. Per a qualsevol valor enter de z s'obté una solució (x,y,z) entera. Per exemple, per a $z=1$ obtenim la solució entera positiva: $(x,y,z)=(2,1,1)$.

PROBLEMES

5. La figura següent representa la regió de solucions d'un sistema d'inequacions lineals



a) Trobeu el sistema d'inequacions que determina aquesta regió. [1 punt]

b) Determineu el valor màxim de la funció $f_1(x,y)=x+y+1$ en aquesta regió, i digueu en quins punts s'assoleix aquest màxim. [1 punt]

c) Trobeu el valor de *a* perquè la funció $f_2(x,y)=ax+2y+3$ assoleixi el màxim en el segment comprès entre els extrems (4,2) i (5,0). [1 punt]

d) Determineu els valors de *a* per als quals la funció $f_2(x,y)=ax+2y+3$ assoleix el màxim només en el punt (4,2). [1 punt]

Solució:

a) Sistema d'inequacions:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0, \\ 0\leq y\leq 4, \\ x+y\leq 6, \\ 2x+y\leq 10. \end{array}\right\}$$

b) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_1(x,y)=x+y+1$	5	7	7	6	1
		màxim	màxim		

Per tant el màxim s'obté en tot el segment BC.

c) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x,y)=ax+2y+3$	11	2a+11	4a+7	5a+3	3

Cal que $4a+7=5a+3$ i per tant, $a=4$. Verifiquem que es tracta d'un màxim:

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x,y)=4x+2y+3$	11	19	23	23	3
			màxim	màxim	

d) Cal que,

$$\left.\begin{array}{r}4a+7>5a+3\\4a+7>2a+11\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}a<4\\a>2\end{array}\right\}\rightarrow 2<a<4.$$

6. El preu de cost d'una unitat d'un cert producte és de 120 €. Si es ven a 150 € la unitat, el compren 500 clients. Per cada 10 € d'augment en el preu, les vendes disminueixen en 20 clients.

a) Trobeu una fórmula mitjançant la qual obtinguem els beneficis. [2 punts]
b) Calculeu a quin preu p per unitat hem de vendre el producte per a obtenir un benefici màxim. [1 punt]
c) En el cas anterior, trobeu el nombre d'unitats que es venen i calculeu el benefici màxim. [1 punt]

Solució:

Si es donen els beneficis en termes del preu p la solució és:

a) Sigui $c(p)$ el nombre de compradors en funció de p. Tindrem:
$c(p)=500-2(p-150)$ i $b(p)=c(p)(p-120)=-2p^2+1040p-96000$.
b) Per trobar el màxim de la paràbola fem la derivada i igualem a zero:
$b'(p)=-4p+1040$, d'on resulta $p=260€$. Es tracta d'un màxim ja que $b''(p)=-4$.
c) Substituint obtenim: $c(p)=500-2(p-150)=500-2\cdot 110=280$ i el benefici és
$b(260)=39200€$.

Alternativament, es pot fer utilitzant com a paràmetre el nombre x d'augments de 10€ a partir del preu inicial de 150€. Llavors la solució és:

a) Per un preu de $P(x)=150+10x$, el nombre de compradors serà de $C(x)=500-20x$. Per tant, el benefici serà de
$B(x)=C(x)(P(x)-120)=(500-20x)(150+10x-120)=200(-x^2+22x+75)$.
b) Per trobar el màxim de la paràbola fem la derivada i igualem a zero: $B'(x)=200(-2x+22)$, d'on resulta $x=11$ i $P=P(11)=150+11\cdot 10=260€$. Es tracta d'un màxim ja que $B''(x)=-400$.
c) El nombre d'unitats que es venen és $C(11)=500-20\cdot 11=280$, i el benefici és $B(11)=39200€$.

SÈRIE 3

QÜESTIONS

1. a) Representeu gràficament la funció:

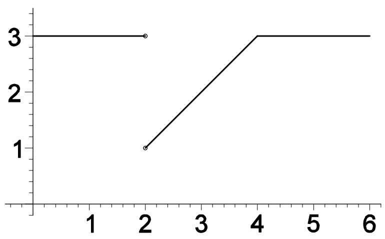
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x-1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \\ 3 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

[1 punt]

b) Digueu en quins punts és discontínua i quin tipus de discontinuïtat té. [1 punt]

Solució:

a) Gràfica:



b) La funció és contínua excepte potser en els punts $x = 2$ i $x = 4$. En aquests punts tenim:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$ i $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 - 1 = 1$. Per tant la funció no és contínua per $x = 2$ i té una discontinuïtat de salt.

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 4 - 1 = 3$ i $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 3$. Per tant la funció és contínua per $x = 4$.

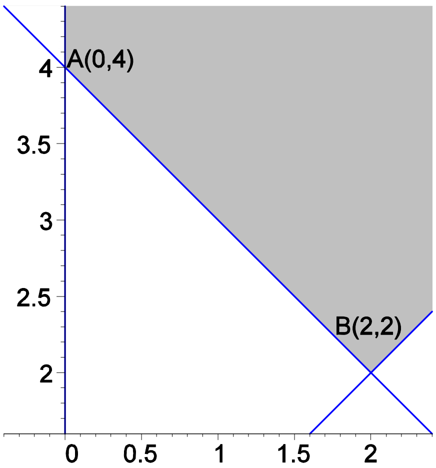
2. Considereu aquesta regió determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \geq 4 \\ -x+y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

a) Representeu la regió. [1 punt]
b) Esbrineu si la funció $f(x,y) = x - 3y + 6$ té màxim en aquesta regió i, si és el cas, trobeu-lo. [1 punt]

Solució:

a) Gràfic:



b) Sobre el costat infinit que comença en el vèrtex A(0,4), la funció $f(x,y) = x - 3y + 6$ decreix en allunyar-se del punt A, ja que la x és 0 i la y augmenta i com figura amb signe negatiu fa disminuir el total. Sobre el costat infinit que comença a B(2,2) la x creix, però la y creix tres vegades més, i com que té signe negatiu, fa disminuir el total. Per tant, el valor màxim de $f(x,y)$ s'ha d'assolir en algun punt del segment AB. Com $f(A) = f(0,4) = -6$, i $f(B) = f(2,2) = 2$, resulta que el màxim de la funció s'obté en el punt B(2,2) i pren el valor $\boxed{f(2,2) = 2}$.

3. L'evolució de la població d'un estat, en milions d'habitants, es pot aproximar per la funció

$$P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40,$$

on t és el temps en anys.

a) Calculeu la població actual (per a $t = 0$). [0.5 punts]
b) Determineu el límit de $P(t)$ quan t tendeix a infinit. [0.5 punts]
c) Determineu al cap de quants anys la població serà màxima i quants habitants prediu la funció per aquest màxim. [1 punt]

Solució:

a) $P(0) = 40$.
b) $\lim_{t\to\infty} P(t) = 40$.
c) Hem de determinar els extrems relatius. La funció derivada és:
$P'(t) = \dfrac{20(4+t^2) - 20t(2t)}{(4+t^2)^2} = \dfrac{20(4-t^2)}{(4+t^2)^2}$. Per tant els extrems relatius s'obtenen quan $4 - t^2 = 0$, és a dir, per $t = -2$ i per $t = 2$. Només ens interessa el segon on $P(2) = 45 > 40$. Per tant es tracta d'un màxim i serà $\boxed{P(2) = 45}$.

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & = & 1 \\ px+2y & = & -2 \end{array}\right\}.$$

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre p. [1 punt]
b) Resoleu-lo per a $p = 5$. [1 punt]

Solució:

a) Resolent per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ p & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-p & -2-p \end{array}\right).$$

Per tant, $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{p = 2}$ $\boxed{\text{és incompatible i altrament és compatible determinat}}$.

b) Per $\boxed{p = 5}$ la matriu esdevé:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 \end{array}\right),$$

I per tant la solució és $\boxed{y = \frac{7}{3},\ x = -\frac{4}{3}}$.

PROBLEMES

5. Un agricultor disposa d'un camp on plantarà patates i pastanagues. Les patates per plantar costen 1,5 €/kg, i les pastanagues, 1,75 €/kg. La quantitat de patates plantades no pot superar el doble de la quantitat de pastanagues i tampoc no pot ser inferior a la meitat de les pastanagues plantades. La despesa que aquest agricultor ha de fer per plantar les patates i les pastanagues no pot superar els 150 €. Per cada kilogram que planta obté un benefici, després de venda, de 20 €/kg per les patates i de 50 €/kg per les pastanagues. Determineu quines quantitats de cada producte ha de sembrar per tal que el benefici després de la venda al mercat sigui màxim. [4 punts]

Solució:

Inequacions:

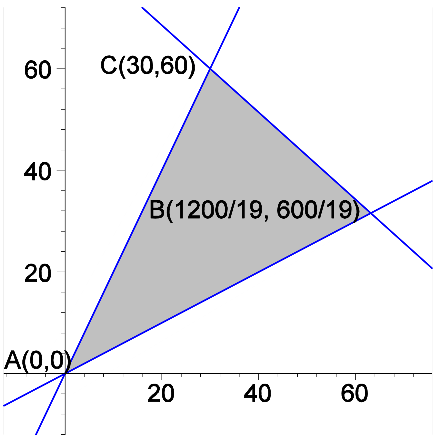
Anomenant x als kg de patates que sembra i y als de pastanagues, la despesa inicial és: $1{,}5x + 1{,}75y$ € que han de ser menor o igual que 150 €. Per altra banda tenim que $x \le 2y$ i $x \ge \dfrac{y}{2}$. La funció que dona els beneficis és $B(x,y) = 20x + 50y$. Simplificant, el sistema d'inequacions és:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \le & 2y \\ 2x & \ge & y \\ 1{,}5x+1{,}75y & \le & 150 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x-2y & \le & 0 \\ 2x-y & \ge & 0 \\ 6x+7y & \le & 600 \end{array}\right\}$$

Vèrtexs:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y & = & 0 \\ 6x+7y & = & 600 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(\frac{1200}{19},\frac{600}{19}\right), \quad \left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 0 \\ 6x+7y & = & 600 \end{array}\right\} \rightarrow C(30,60), \quad A(0,0).$$

Gràfic:



Valors:

	$A(0,0)$	$B\left(\frac{1200}{19},\frac{600}{19}\right)$	$C(30,60)$
$B(x,y)=20x+50y$	0	$\frac{54000}{19}=2842{,}11$	3600

Per tant el benefici màxim s'obté plantant 30 kg de patates i 60 kg de pastanagues i és de 3600 €.

6. Fa un any, una persona va invertir 12000 € en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 25%, les de l'empresa B han augmentat en un 10% i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15% del seu valor. Si ara vengués totes les accions, no obtindria ni pèrdues ni beneficis. Sabent que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes, calculeu la quantitat de diners que va invertir en accions de cada empresa. [4 punts]

Solució:

Anomenant x, y, z les quantitats invertides en les respectives accions A,B,C, les condicions són:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 12000 \\ 0,25x+0,1y-0,15z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 12000 \\ 5x+2y-3z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 0 & -3 & -8 & -60000 \\ 0 & 0 & -2 & -12000 \end{array}\right),$$

D'on resulta $\boxed{z=6000}$ €, $\boxed{y=4000}$ €, $\boxed{x=2000}$ €.

Alternativament, de la primera i tercera equació s'obté directament $z=6000$, i el sistema llavors és molt més senzill.