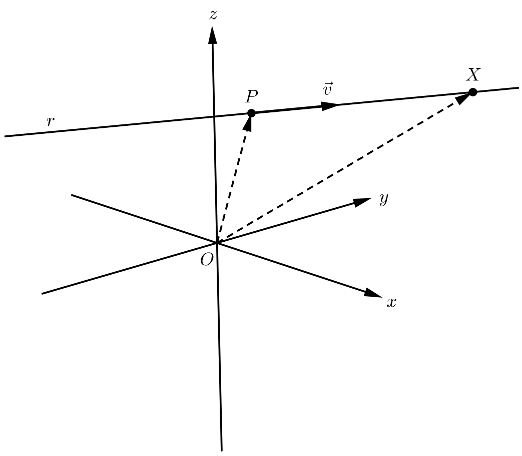
RESUM DE GEOMETRIA A L'ESPAI

Equacions de la recta a l'espai

Equació vectorial d'una recta

$$\overline{OX} = \overline{OP} + \lambda\cdot\vec{v}\,, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$
$$(x\,,\ y\,,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + \lambda(v_x,\ v_y,\ v_z), \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$



Equacions paramètriques d'una recta

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases} \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Equacions contínues d'una recta

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

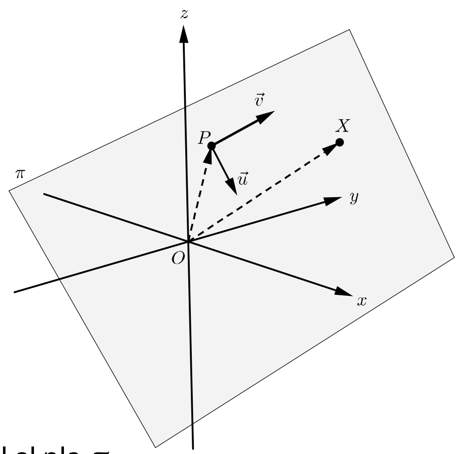
Equacions del pla a l'espai

Equació vectorial d'un pla

$$\overline{OX} = \overline{OP} + \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v}, \quad \forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$$
$$(x\,,\ y\,,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + \lambda(u_x,\ u_y,\ u_z) + \mu(v_x,\ v_y,\ v_z), \quad \forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$$

Equacions paramètriques d'un pla

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_0 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_0 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases} \qquad \forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$$



Equació general, cartesiana o implícita d'un pla

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_x & v_x \\ y - y_0 & u_y & v_y \\ z - z_0 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

amb $\vec{n} = (A, B, C)$ vector normal al pla π

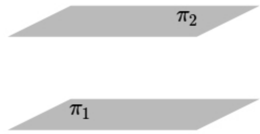
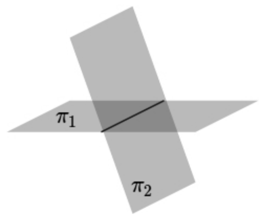
Equació canònica d'un pla

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$ essent $(l,\ 0,\ 0)$, $(0,\ m,\ 0)$ i $(0,\ 0,\ n)$ interseccions de π amb els eixos.

Posició relativa de 2 plans

$$\pi_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$\pi_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

$$1 \leq \text{rang}\, M \leq 2$$
$$1 \leq \text{rang}\, M' \leq 2$$
$$\text{rang}\, M \leq \text{rang}\, M'$$

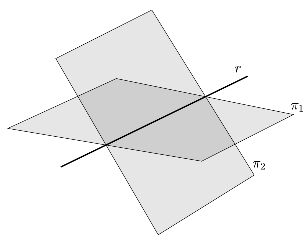
rang *M*	**rang *M'***	***n***	**Sistema**	**Posició relativa**	
1	1	3	SCI amb 2 GL	2 plans coincidents.	
1	2	3	SI	2 plans paral·lels.	
2	2	3	SCI amb 1 GL	2 plans secants. La seva intersecció és una recta.	

Posició relativa de 2 plans expressats amb equacions generals

- $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2} \quad \Rightarrow$ Els plans són coincidents
- $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2} \quad \Rightarrow$ Els plans són paral·lels
- En qualsevol altre cas $\quad \Rightarrow$ Els plans es tallen en una recta

Recta determinada per dos plans diferents no paral·lels

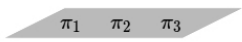
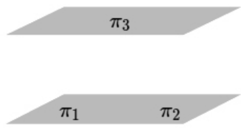
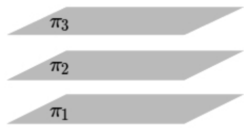
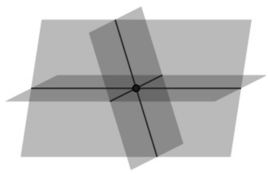
$$r: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$



Posició relativa de 3 plans

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2 &: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ \pi_3 &: \quad A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \end{aligned}$$

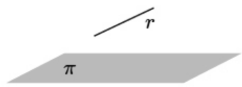
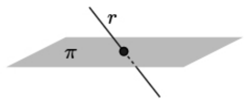
$1 \leq \text{rang}\, M \leq 3$
$1 \leq \text{rang}\, M' \leq 3$
$\text{rang}\, M \leq \text{rang}\, M'$

rang *M*	**rang *M'***	***n***	**Sistema**	**Posició relativa**	
1	1	3	SCI amb 2 GL	3 plans coincidents	
1	2	3	SI	2 plans coincidents i 1 paral·lel	
				3 plans paral·lels	
2	2	3	SCI amb 1 GL	3 plans amb una recta comú	
				2 plans coincidents i el 3r secant	
2	3	3	SI	2 plans paral·lels i el 3r secant	
				3 plans secants 2 a 2	
3	3	3	SCD	3 plans que concorren en 1 punt	

Posició relativa d'una recta i un pla

$$r: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$
$$\pi: \quad A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$$

$2 \leq$ rang $M \leq 3$
$2 \leq$ rang $M' \leq 3$
rang $M \leq$ rang M'

rang *M*	rang *M'*	*n*	Sistema	Posició relativa	
2	2	3	SCI amb 1 GL	Recta continguda al pla	
2	3	3	SI	Recta paral·lela al pla	
3	3	3	SCD	Recta secant al pla	

Posició relativa d'un pla i una recta definida a partir d'un punt P i un vector director $\vec{v}$

$$\left. \begin{array}{l} P \in \pi \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow r \text{ continguda a } \pi \quad (r \subset \pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} P \notin \pi \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow r \text{ paral·lela a } \pi \quad (r \parallel \pi)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow r \text{ secant a } \pi \quad (r \between s)$$

Posició relativa d'un pla i una recta expressada amb equacions paramètriques

$$\left. \begin{array}{l} \pi: \ Ax + By + Cz + D = 0 \\ r: \begin{cases} x = x_P + \lambda v_x \\ y = y_P + \lambda v_y \\ z = z_P + \lambda v_z \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x_P + \lambda v_x) + B(y_P + \lambda v_y) + C(z_P + \lambda v_z) + D = 0$$

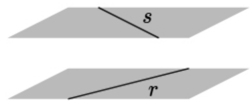
Equació d'incògnita λ

$\lambda = k$ (solució única) $\Rightarrow$ $r \between \pi$
$0\lambda = 0$ (infinites solucions) $\Rightarrow$ $r \subset \pi$
$0\lambda \neq 0$ (no té solució) $\Rightarrow$ $r \parallel \pi$

Posició relativa de 2 rectes

$$r: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$
$$s: \begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 \end{cases}$$

$1 \leq \text{rang}\, M \leq 3$
$1 \leq \text{rang}\, M' \leq 4$
$\text{rang}\, M \leq \text{rang}\, M'$

rang *M*	**rang *M'***	***n***	**Sistema**	**Posició relativa**	
2	2	3	SCI amb 1 GL	Rectes coincidents ($r = s$)	
2	3	3	SI	Rectes paral·leles ($r \parallel s$)	
3	3	3	SCD	Rectes secants ($r \between s$)	
3	4	3	SI	Rectes que es creuen ($r \times s$)	

Posició relativa de dues rectes definides a partir d'un punt i un vector director

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ v.l.d.} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{u}, \overrightarrow{PQ} \text{ v.l.d.} & \Rightarrow \quad r = s \\ \vec{u}, \overrightarrow{PQ} \text{ v.l.i.} & \Rightarrow \quad r \parallel s \end{cases}$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ v.l.i.} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = 0 & \Rightarrow \quad r \between s \\ [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] \neq 0 & \Rightarrow \quad r \times s \end{cases}$$

Distàncies i angles

Distància entre 2 punts

$$\left.\begin{array}{l} P(x_P, y_P, z_P) \\ Q(x_Q, y_Q, z_Q) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

Distància entre un punt i una recta

$$\left.\begin{array}{l} P(x_P, y_P, z_P) \\ r: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\, \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Distància entre un punt i una pla

$$\left.\begin{array}{l} P(x_P, y_P, z_P) \\ \pi:\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d(P, \pi) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distància entre dos plans

$$\begin{array}{lll} d(\pi_1, \pi_2) = 0 & \text{si } \pi_1 = \pi_2 & \\ d(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & \text{si } r \parallel \pi & \text{amb } \begin{cases} \pi_1:\ Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \pi_2:\ Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{cases} \\ d(\pi_1, \pi_2) = 0 & \text{si } \pi_1 \between \pi_2 & \end{array}$$

Distància una recta i un pla

$$\begin{array}{lll} d(r, \pi) = 0 & \text{si } r \subset \pi & \\ d(r, \pi) = d(P, \pi) & \text{si } r \parallel \pi & \text{amb } P \in r \\ d(r, \pi) = 0 & \text{si } r \between \pi & \end{array}$$

Distància entre dues rectes

$$\begin{array}{lll} d(r, s) = 0 & \text{si } r = s & \\ d(r, s) = d(P, s) & \text{si } r \parallel s & \text{amb } P \in r \\ d(r, s) = 0 & \text{si } r \between s & \\ d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} & \text{si } r \times s & \text{amb } \begin{cases} r:\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u} \\ s:\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \vec{v} \end{cases} \end{array}$$

Angle entre dues rectes

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

Angle entre dos plans

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Angle entre una recta i un pla

$$\alpha = \arcsin \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$