Matrius i determinants

1998 - Sèrie 3 - Qüestió 4

Donada la matriu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, utilitzeu la matriu inversa $\boldsymbol{B}^{-1}$ per trobar una matriu $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

2004 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Considereu les matrius

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una matriu $\boldsymbol{X}$ que compleixi $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

[2 punts]

2004 - Sèrie 5 - Qüestió 3

Donades les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

- **a)** trobeu una matriu $\boldsymbol{X}$ que compleixi $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$;
- **b)** calculeu $\boldsymbol{B}^{100}$. Raoneu la resposta.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

2005 - Sèrie 1 - Qüestió 2

La matriu següent expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles, A, B, C i D, procedents de les fàbriques f1, f2 i f3:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si una comanda és representada per un vector fila $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$, què representa cadascun dels elements del resultat del producte $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{P}$? Si volem comprar 25 unitats de A, 30 de B, 60 de C i 75 de D, quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

[2 punts]

2005 - Sèrie 4 - Qüestió 1

Donades les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals, trobeu els valors de a i b que fan que les dues matrius commutin, és a dir, que fan que es compleixi $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

[2 punts]

2006 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Donades les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calculeu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

b) Comproveu que $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

2006 - Sèrie 3 - Qüestió 4

Sigui la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determineu els valors de m per als quals $\text{rang}(\boldsymbol{A}) < 3$. Pot ser $\text{rang}(\boldsymbol{A}) = 1$ per a algun valor de *m?*

[2 punts]

2007 - Sèrie 3 - Qüestió 3

Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val $\boldsymbol{A}^{10}$.

[2 punts]

2008 - Sèrie 2 - Qüestió 2

Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu $\boldsymbol{M}$, quadrada d'ordre 2, tal que $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

b) Comproveu que $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{I}_2$ (matriu identitat d'ordre 2) i deduïu l'expressió de $\boldsymbol{M}^n$.

[1 punt per cada apartat]

2008 - Sèrie 4 - Qüestió 2

Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $\boldsymbol{A}^2$ i $\boldsymbol{A}^3$.

b) Determineu, raonadament, el valor de $\boldsymbol{A}^{60124}$.

[1 punt per cada apartat]

2008 - Sèrie 5 - Qüestió 2

Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals.

a) Calculeu el valor de a i b per tal que $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu $\boldsymbol{A}^3$ i $\boldsymbol{A}^4$.

c) Si n és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de $\boldsymbol{A}^n$ en funció de n.

[1 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 0,5 punts per l'apartat c]

2009 - Sèrie 1 - Qüestió 1

Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Calculeu el valor dels paràmetres a i b perquè $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

2009 - Sèrie 3 - Qüestió 1

Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors dels paràmetres a i b perquè la matriu tingui rang 1.

[2 punts]

2009 - Sèrie 4 - Qüestió 2

Siguin $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que la inversa de $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}^2$.

b) Comproveu també que $\boldsymbol{A}^{518} = \boldsymbol{B}$.

[1 punt per cada apartat]

2010 - Sèrie 1 - Qüestió 6

Sigui $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

[2 punts]

2010 - Sèrie 2 - Qüestió 4

Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que compleix la igualtat $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_2$, on $\boldsymbol{I}_2$ és la matriu identitat d'ordre 2.

b) Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$.

c) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilitzant la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$.

[2 punts]

2010 - Sèrie 4 - Qüestió 2

Considereu la igualtat matricial $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2$.

a) Comproveu si les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.

b) En general, donades dues matrius qualssevol $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

[1 punt cada apartat]

2010 - Sèrie 5 - Qüestió 4

Siguin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ matrius quadrades d'ordre n.

a) Expliqueu raonadament si és possible que $\det\boldsymbol{A} \neq 0$, $\det\boldsymbol{B} \neq 0$ i $\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = 0$. Si és possible, poseu-ne un exemple.

b) Si sabem que $\det\boldsymbol{A} \neq 0$ i que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$, expliqueu raonadament si podem assegurar que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

[1 punt cada apartat]]

2011 - Sèrie 1 - Qüestió 2

Si tenim la matriu invertible $\boldsymbol{A}$ i l'equació matricial $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$:

a) Aïlleu la matriu $\boldsymbol{X}$.

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ quan $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punt per cada apartat]]

2011 - Sèrie 2 - Qüestió 1

Donada la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$:

a) Calculeu els valors del paràmetre k per als quals la matriu $\boldsymbol{M}$ no és invertible.

b) Per a $k = 0$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.

[1 punt per cada apartat]]

2011 - Sèrie 2 - Qüestió 4

Sigui la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calculeu $\boldsymbol{A}^2$ i $\boldsymbol{A}^3$.

b) Deduïu el valor de $\boldsymbol{A}^{101}$.

NOTA: Treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.

[1 punt per cada apartat]

2012 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n de manera que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, en què $\boldsymbol{O}$ és la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

a) Comproveu que $\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n\right)^2 = 2\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$.

b) Comproveu que les matrius $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$ són l'una inversa de l'altra.

[1 punt per cada apartat]]

2012 - Sèrie 1 - Qüestió 5

Contesteu les preguntes següents:

a) Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

b) Considereu les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p perquè $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$.

[1 punt per cada apartat]]

2012 - Sèrie 3 - Qüestió 4

Donades les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Comproveu que es compleix la igualtat $\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right)\cdot\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$.

b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ concretes.

[1 punt per cada apartat]]

2012 - Sèrie 4 - Qüestió 1

Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre k.

[2 punts]

2013 - Sèrie 1 - Qüestió 4

Siguin les matrius

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{pmatrix}$$

on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

[2 punts]

2013 - Sèrie 3 - Qüestió 2

Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$. Sigui $\boldsymbol{I}$ la matriu identitat d'ordre 2.

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè es compleixi que $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

b) Calculeu la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ quan $a = -2$.

[1 punt per cada apartat]

2011 - Sèrie 2 - Qüestió 4

Sigui $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

a) Què significa que la matriu $\boldsymbol{B}$ sigui la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$?

b) Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$ i la matriu transposada de $\boldsymbol{A}$ coincideixin.

Nota: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

2014 - Sèrie 3 - Qüestió 6

Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible i $\boldsymbol{A}^{-1}$ satisfà $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2 = \boldsymbol{I}$.

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2014 - Sèrie 4 - Qüestió 5

Responeu a les qüestions següents:

a) Si $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

$$\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right)^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

b) Si $\boldsymbol{M}_1$ i $\boldsymbol{M}_2$ són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$ comproveu que el producte $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$ té també la mateixa forma i que $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2014 - Sèrie 5 - Qüestió 6

Considereu l'equació matricial $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, en què

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & -3 & a-1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -4\\ 5 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial quan $a=3$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2015 - Sèrie 2 - Qüestió 5

Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu la matriu de la forma $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ que satisfà $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu $\boldsymbol{A}^{-1}$ a partir de la igualtat $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2015 - Sèrie 4 - Qüestió 5

Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada que compleix que $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Demostreu que la matriu $\boldsymbol{A}$ té inversa i que $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{2}$.

b) En el cas de $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2015 - Sèrie 5 - Qüestió 1

Sigui la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Determineu per a quins valors de a existeix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

b) Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ per a $a = 0$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2015 - Sèrie 5 - Qüestió 6

Trobeu totes les matrius de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]