

Primitives i integrals

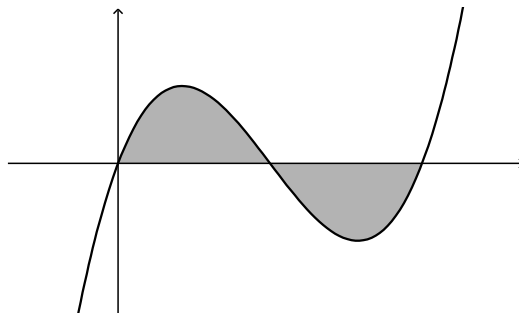
1998 - Sèrie 2 - Qüestió 3

Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i la recta vertical $x = 2$.

[2 punts]

1998 - Sèrie 3 - Qüestió 3

Considereu la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ la gràfica de la qual és aproximadament la del dibuix següent:



Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

[2 punts]

1998 - Sèrie 5 - Qüestió 1

Trobeu el valor de k per tal que

$$\int_{k+1}^{2k} \frac{dx}{x-k} = 3$$

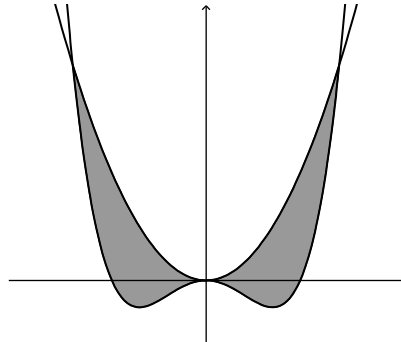
[2 punts]

1999 - Sèrie 1 - Qüestió 2

Calculeu l'àrea determinada per les corbes d'equacions

$$y = x^4 - 2x^2 \quad \text{i} \quad y = 2x^2$$

representada en el dibuix següent:



[2 punts.]

1999 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Calculeu raonadament l'expressió d'una funció $f(x)$ tal que $f'(x) = xe^{-x^2}$ i que $f(0) = \frac{1}{2}$.

[2 punts]

1999 - Sèrie 1 - Problema 1

Donada la funció $f(x) = x - 4 + \frac{16}{x+4}$

- Estudieu-ne la continuïtat.
- Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims locals.
- Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes verticals $x = 0$ i $x = 2$.

[4 punts]

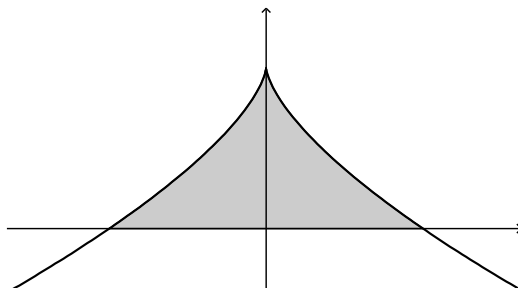
1999 - Sèrie 5 - Qüestió 3

Trobeu el valor del coeficient k de manera que l'àrea limitada per la funció $f(x) = -x^2 + k$ i l'eix d'abscisses sigui igual a $36u^2$.

[2 punts]

1999 - Sèrie 6 - Qüestió 2

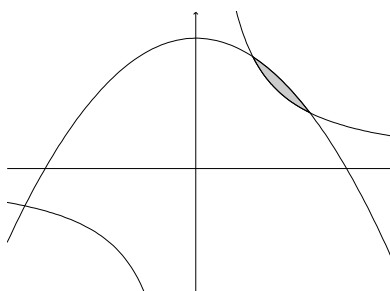
Sigui $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Calculeu l'àrea de la regió que limita la gràfica de $f(x)$ i l'eix d'abscisses i que està representada en el dibuix següent:



[2 punts]

2000 - Sèrie 1 - Qüestió 2

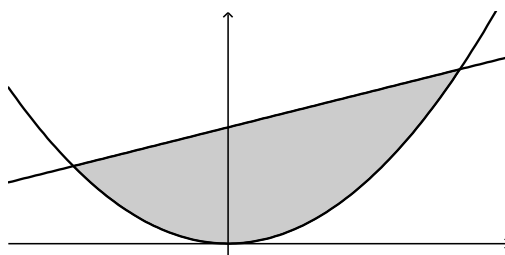
Calculeu l'àrea que té l'únic recinte tancat limitat per les gràfiques de les funcions $f(x) = -x^2 + 7$ i $y = \frac{6}{x}$ representat en el dibuix següent:



[2 punts]

2000 - Sèrie 2 - Qüestió 2

Calculeu per integració la superfície del recinte delimitat per les corbes $y = x^2$ i la recta d'equació $y - x - 6 = 0$ representat en el dibuix següent:



[2 punts]

2000 - Sèrie 3 - Qüestió 1

El polinomi $p(x) = x^2 + ax + b$ s'anul·la per a $x = 2$ i compleix $\int_0^2 p(x) dx = 4$. Calculeu raonadament a i b .

[2 punts]

2000 - Sèrie 6 - Qüestió 1

D'una funció $y = f(x)$ sabem

- a) El seu domini de definició és tot \mathbb{R} .
- b) La seva funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

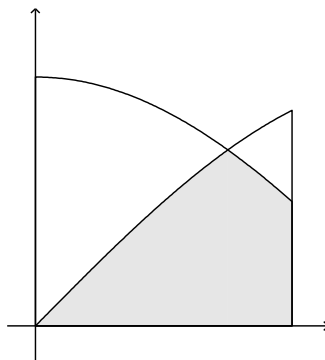
- c) $f(x)$ és contínua en tot punt i $f(-1) = 2$.

Determineu el valor de $f(1) = 2$ i dibuixeu la gràfica de la funció $f(x)$.

[2 punts]

2001 - Sèrie 2 - Qüestió 1

- a) Quin és l'angle x en radians $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\sin(x) = \cos(x)$?
- b) Considereu les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = \cos(x)$. Calculeu la superfície del recinte delimitat superiorment per les gràfiques d'aquestes funcions, inferiorment per l'eix d'abscisses i lateralment per les rectes verticals $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{3}$ representat en l'esquema següent:



[2 punts]

2001 - Sèrie 4 - Qüestió 4

Sabeu que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(1, -4)$ i que la seva funció derivada és $f'(x) = 2x - 2$.

- Determineu l'expressió de $f(x)$.
- Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$ i l'eix d'abscisses OX .

[2 punts]

2001 - Sèrie 5 - Qüestió 4

Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció $f(x) = x e^x$ per a $x \geq 0$, l'eix d'abscisses i la recta vertical $x = 1$.

[2 punts]

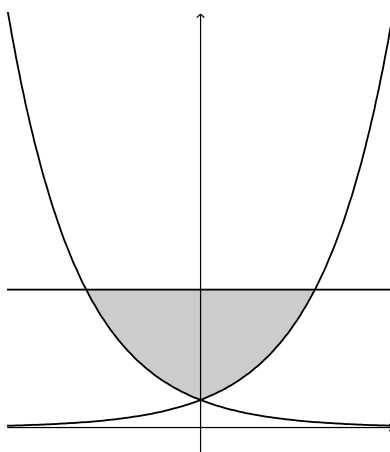
2002 - Sèrie 1 - Qüestió 1

Calculeu el valor positiu de a que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació $y = ax + 2a$ i la paràbola $y = ax^2$ valgui 18.

[2 punts]

2002 - Sèrie 2 - Qüestió 1

Calculeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les corbes $y = e^{2x}$ i $y = e^{-2x}$ i la recta $y = 5$ representada en l'esquema següent:



[2 punts]

2002 - Sèrie 3 - Qüestió 1

Calculeu la primitiva de la funció $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[2 punts]

2003 - Sèrie 2 - Qüestió 2

Calculeu

$$\int_1^e \frac{2\ln^3(x)}{x} dx$$

[2 punts]

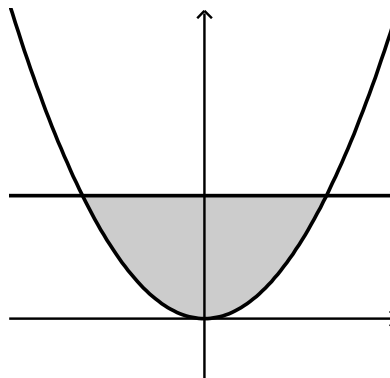
2003 - Sèrie 3 - Qüestió 1

Donada $f(x) = (2x + 1) \cdot e^{x^2+x}$, determineu la funció $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ (és a dir, una primitiva de $f(x)$) i que el seu gràfic passa pel punt $(0, 2)$.

[2 punts]

2003 - Sèrie 5 - Qüestió 3

Considerem la regió S del pla limitada per la paràbola $y = 3x^2$ i la recta $y = 3$ representada en l'esquema següent:



Siguin A i B els punts d'intersecció de la recta i la paràbola, i T el triangle que té per vèrtexs A , B i l'origen de coordenades $(0, 0)$. Calculeu l'àrea de la regió que resulta quan es treu el triangle T a la regió S .

[2 punts]

2004 - Sèrie 1 - Problema 5

Considereu la funció $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$, $m \geq 0$.

- Calculeu el valor de m per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$ sigui de 10 unitats quadrades.
- Per a $m = 1$, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45° amb el semieix positiu de OX .

[Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 2 punts. Total: 4 punts]

2004 - Sèrie 3 - Qüestió 2

Donada la funció $f(x) = \cos x - \cos^3 x$:

- trobeu la seva integral indefinida;
- quina és la primitiva de $f(x)$ que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

Indicació: recordeu que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 0,5 punts. Total 2 punts]

2004 - Sèrie 5 - Qüestió 1

Calculeu el valor de la integral següent:

$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1} dx$$

[2 punts]

2005 - Sèrie 1 - Problema 6

Considereu la funció $f(x) = 4x - x^2$.

- Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.
- Feu un gràfic dels elements del problema.
- Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a 'apartat a).

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts]

2005 - Sèrie 5 - Qüestió 2

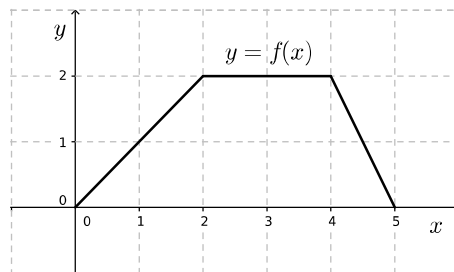
Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$.

- a) Calculeu la integral $\int f(x) dx$
- b) Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

[2 punts]

2006 - Sèrie 3 - Qüestió 2

Considerem la funció $y = f(x)$ definida per a $x \in [0, 5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.

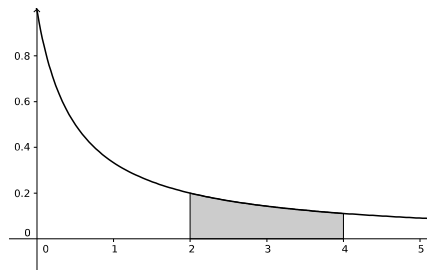


- a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?
- b) Calculeu $\int_0^3 f(x) dx$

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

2006 - Sèrie 4 - Qüestió 2

El gràfic de la funció $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ quan $x > 0$, és com segueix:



- a) Trobeu una primitiva de la funció f .
- b) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

2006 - Sèrie 4 - Problema 5

Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 + 2x - 3$.

- Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$
- Calculant el mínim de la funció $y = x^2 + 2x - 3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.
- Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.
- Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

[Puntuació: cada apartat val 1 punt. Total: 4 punts]

2007 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

[2 punts]

2007 - Sèrie 3 - Problema 6

Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$:

- Calculeu a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
- Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.
- Pel valor de a obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses OX i la funció $f(x)$.

[1,5 punts / apartat a, 1 punt / apartat b, 1,5 punts / apartat c]

2008 - Sèrie 2 - Qüestió 1

Se sap que certa funció derivable $F(x)$ verifica les condicions següents:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \quad \text{i} \quad F(1) = 3$$

- a) Trobeu $F(x)$.
- b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ i l'eix OX des de $x=0$ fins a $x=1$.

[1 punt per cada apartat]

2009 - Sèrie 3 - Qüestió 2

Considereu les corbes $y=4x-x^2$ i $y=x^2-6$.

- a) Trobeu-ne els punts d'intersecció.
- b) Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.
- c) Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

2009 - Sèrie 3 - Problema 5

Sigui la funció $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$.

- a) Calculeu els valors de a i b , sabent que la recta $2x+3y=14$ és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=3$.

Per a la resta d'apartats, considereu que $a=-3$ i que $b=4$.

- b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.
- c) Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .
- d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x=1$ i $x=3$.

[1 punt per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 0,5 punts per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

2009 - Sèrie 4 - Qüestió 3

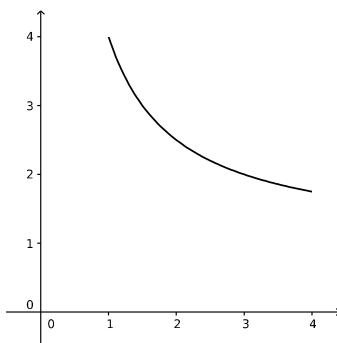
Considereu la funció $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

- a) Trobeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .
- b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a .

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

2009 - Sèrie 4 - Problema 5

La gràfica de la funció $f(x) = \frac{3+x}{x}$, des de $x=1$ fins a $x=4$, és la següent:

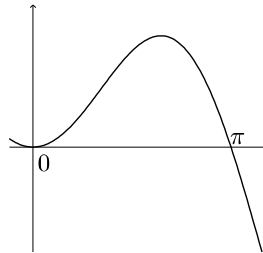


- a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x=1$ i $x=3$.
- b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
- c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
- d) Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

[1 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

2010 - Sèrie 1 - Qüestió 5

La gràfica de la funció $f(x)=x\sin(x)$ és la següent:



- a) Trobeu-ne una primitiva.
- b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x=0$ fins a $x=\pi$.

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

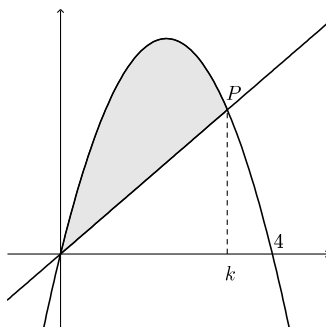
2010 - Sèrie 2 - Qüestió 5

Sigui $f(x) = \frac{8x^2}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x=0$ i $x=2$.

[2 punts]

2010 - Sèrie 5- Qüestió 6

En la figura es mostra la corba $y = x(x - 4)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k , amb $0 < k < 4$.



- a) Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k .
- b) Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX .

[1 punt per apartat]

2011 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Definim les funcions $f(x) = a(1 - x^2)$ i $g(x) = \frac{x^2 - 1}{a}$, en què $a > 0$.

- a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és:

$$\frac{4(1 + a^2)}{3a}$$

- b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

[1 punt per cada apartat]

2011 - Sèrie 2 - Qüestió 6

Sigui $f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2) dx$ per $a > 0$.

- a) Comproveu que $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$.

- b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.

[1 punt per cada apartat]

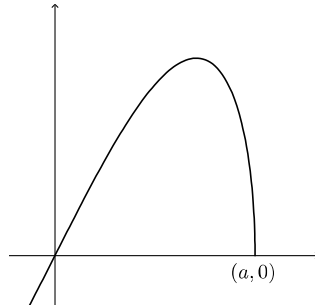
2011 - Sèrie 4 - Qüestió 1

Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2$ i $g(x) = 5 - 3x$.

[2 punts]

2012 - Sèrie 1 - Qüestió 2

La gràfica de la funció $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$ és la següent:



- a) Trobeu el punt de tall, $(a, 0)$, de la funció amb la part positiva de l'eix OX.
- b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$ i l'eix OX en el primer quadrant.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

2013 - Sèrie 1 - Qüestió 2

De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

— té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$;

— la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\frac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b .

[2 punts]

2013 - Sèrie 3 - Qüestió 3

Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

- a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.
- b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a $14/3$.

[0,5 per l'apartat a; 1,5 per l'apartat b]

2013 - Sèrie 4 - Qüestió 2

La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

- a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k .
- b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6} u^2$.

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

2013 - Sèrie 5 - Qüestió 4

Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

- a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.
- b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX .

[1 punt per cada apartat]

2014 - Sèrie 3 - Qüestió 4

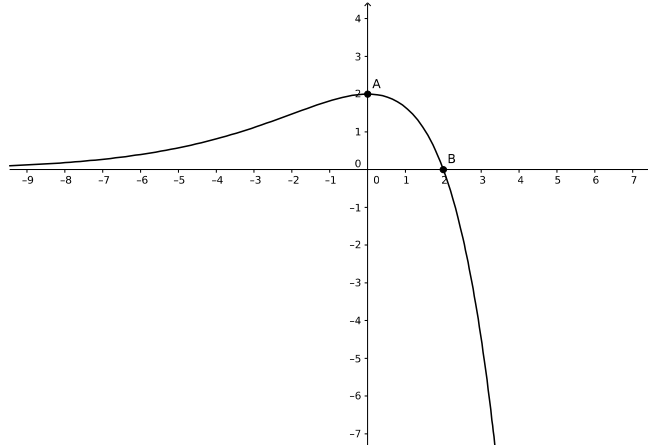
Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $f(x) = 8$.

[2 punts]

2014 - Sèrie 4 - Qüestió 6

Responen a les qüestions següents:

- a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A(0, 2)$ i $B(2, 0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b .

- b) Calculeu $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2014 - Sèrie 5 - Qüestió 4

Sabem que una funció f té per derivada la funció $f'(x) = (3x - 2)^2(x - 2)$.

- a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.
- b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2015 - Sèrie 2 - Qüestió 3

Responen a les qüestions següents:

- a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
- b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.

[2 punts. 1 punt cada apartat]