

Exercicis de matrius i determinants

Definició de matrius i operacions bàsiques

1. ESCRIU de forma explícita la matriu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimensió 3×4 amb $a_{ij} = 2 - i + 2j$

2. Donades les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a+b \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, troba els valors de a i b que fan que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

3. Troba els valors de a i b per tal que la matriu següent sigui antisimètrica

$$\begin{pmatrix} a+b & 2 \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

4. Donades les matrius $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la combinació lineal $3\mathbf{P} - 4\mathbf{Q}$.

5. Donades les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & x \\ y+1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, troba els valors de x i y que fan que $3\mathbf{A} = -2\mathbf{B}$.

6. Calcula tots els productes possibles que es poden fer entre dues matrius diferents d'aquestes tres:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Donades les matrius $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, calcula $\mathbf{M}^T - \mathbf{N}^2$.

8. Donada la matriu fila $\mathbf{A} = (-2 \ 3 \ 5)$, calcula:

a) $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ c) $\text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ d) $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)$

9. Donades les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$ b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$ c) $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$ d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T$

10. Donada la matriu $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$,

a) comprova que la matriu $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)$ és una matriu simètrica,

b) comprova que la matriu $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}^T)$ és antisimètrica

c) i comprova que $\mathbf{M} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$.

11. Comprova si les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ commuten.

12. Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcula \mathbf{A}^n .

13. Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula \mathbf{A}^n .

Càlcul de determinants i propietats

14. Calcula els següents determinants d'ordre 2:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{5} \\ \sqrt{3} & \sqrt{10} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m-1 & m+1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 39 & 91 \\ 27 & 63 \end{vmatrix}$

15. Calcula els següents determinants d'ordre 3:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

16. Resol l'equació:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

17. Sabent que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5,$$

calcula, fent servir les propietats dels determinants, el valor de:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} b & a & c \\ 3e & 3d & 3f \\ 4h & 4g & 4i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a-b & b & c \\ g-h & h & i \\ d-e & e & f \end{vmatrix}$

18. Sense calcular el determinant, demostra que les arrels del següent polinomi són 1, 3 i -4

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}$$

19. Sabent que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4,$$

calcula, fent servir les propietats dels determinants, el valor de

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$$

20. Quin serà l'ordre d'una matriu quadrada \mathbf{A} si sabem que el seu determinant és -5 i que el determinant de la matriu $3 \cdot \mathbf{A}^T$ és -1215 ?

Matrius inverses

21. Troba, si existeixen, les matrius inverses de:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

22. Troba, si existeixen, les matrius inverses de:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

23. Amb la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ calcula \mathbf{A}^2 , \mathbf{A}^3 , \mathbf{A}^{31} i \mathbf{A}^{-1}

24. Donada la matriu $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$,

a) troba els valors de λ que fan que sigui invertible

b) i troba \mathbf{M}^{-1} per a $\lambda = -4$.

25. Calculeu el determinant de la inversa de la matriu $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

26. Una matriu \mathbf{A} és ortogonal si verifica que $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$, que és el mateix que dir que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.
Demostra que el seu determinant és igual a ± 1 .

27. Comprova quines de les matrius següents són ortogonals.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ -0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Equacions matricials

28. Donades les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, resol l'equació $3 \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{A}) = 2 \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{X})$.

29. Donades les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, resol l'equació $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

30. Resol el sistema d'equacions matricials següent

$$\left. \begin{aligned} 2\mathbf{X} + 3\mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} 18 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ 3\mathbf{X} - 5\mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ -3 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Rang d'una matriu

31. Troba el rang de les següents matrius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 14 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

32. Troba el rang de la matriu

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 6 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

33. Troba el rang de la matriu

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

34. Donada la matriu

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

troba el valor del paràmetre a pel qual $\text{rang } \mathbf{M} = 2$.

Solucions

$$1. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2. a = \frac{1}{2} \text{ i } b = \frac{3}{2}$$

$$3. a = -1 \text{ i } b = 1$$

$$4. 3\mathbf{P} - 4\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -22 & -5 \\ 29 & -8 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}$$

$$5. x = -2 \text{ i } y = \frac{1}{3}$$

$$6. \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ -3 & 9 & 0 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -7 & 11 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$7. \mathbf{M}^T - \mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$8. \text{ a) } \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ -6 & 9 & 15 \\ -10 & 15 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{ b) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = (38) \quad \text{ c) } \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) = 38 \quad \text{ d) } \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) = 38$$

$$9. \text{ a) } \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{ b) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{ c) } \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 7 & -2 & -7 \\ -8 & 1 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{ d) } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$10. \text{ a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ b) } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ c) } \mathbf{S} + \mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) = \mathbf{M}$$

$$11. \text{ Sí commuten. } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$12. \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$13. \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14. \text{ a) } 13 \quad \text{ b) } \sqrt{15} \quad \text{ c) } 4m \quad \text{ d) } 0$$

$$15. \text{ a) } 1 \quad \text{ b) } (x-1)^2 \cdot (x+2) \quad \text{ c) } 13$$

16. $x = 1 \wedge x = -\frac{1}{2}$

17. a) 10 b) 60 c) 5

18. Si $x=1$, les dues primeres files són iguals i per tant el determinant és zero.

Si $x=3$, les dues files últimes són iguals i per tant el determinant és zero.

Si $x=-4$, la primera columna és una c.l. de les altres dues i per tant el determinant és zero.

19. 12

20. És d'ordre 5.

21. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) \mathbf{C} non és regular d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

22. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) \mathbf{B} no és regular c) $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{31} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

24. a) \mathbf{M} és invertible si $\lambda = 1$ o $\lambda = -2$ b) $\mathbf{M}^{-1} = -\frac{1}{50} \begin{pmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 15 \\ 4 & 16 & 5 \end{pmatrix}$

25. $|\mathbf{B}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{10}$

26. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow |\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}^{-1}| \Rightarrow |\mathbf{A}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \Rightarrow |\mathbf{A}|^2 = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}| = \pm 1$

27. \mathbf{A} no és ortogonal. \mathbf{B} i \mathbf{C} sí ho són.

28. $\mathbf{X} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

29. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

31. rang $\mathbf{A} = 2$ rang $\mathbf{B} = 2$ rang $\mathbf{C} = 1$ rang $\mathbf{D} = 3$ rang $\mathbf{E} = 2$

32. rang $\mathbf{X} = 3$

33. rang $\mathbf{Y} = 2$

34. $a = -6$