

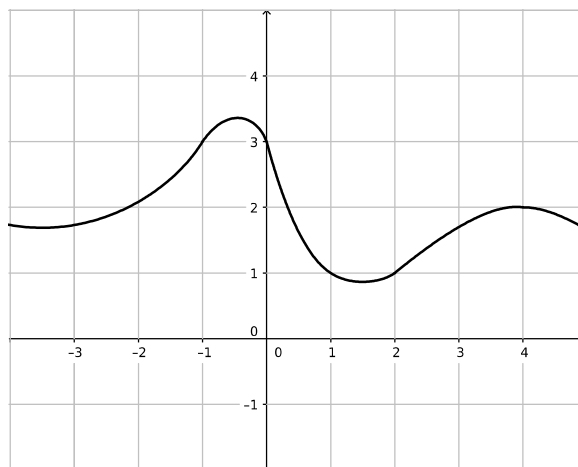
Exercicis de derivades

Variació mitjana d'una funció

1. Calcula la variació mitjana de la funció $f(x) = x^2 - 2x$ als següents intervals:

a) $[-1, 3]$ b) $[0, 4]$ c) $[1, 5]$

2. Donada la funció següent:



a) Quina és la variació mitjana de la funció següent a l'interval $[-1, 2]$?

b) I a l'interval $[0, 4]$?

3. Donada la funció $f(x) = x^3 + x$, troba l'equació explícita de la seva recta secant que passa pels punts de la gràfica de f d'abscisses $x = -1$ i $x = 2$.

4. Un mòbil descriu un moviment unidimensional representat per l'equació $x(t) = t^2 - 3t + 4$ (en unitats del S.I.). Quina serà la velocitat mitjana entre els instants $t = 2$ i $t = 5$?

5. L'índex de la Borsa de Barcelona ha passat en els sis primers mesos de 2015 de 857,21 a 904,32. Quina és la taxa de variació mitjana mensual?

6. Calcula la variació mitjana de les funcions

$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$h(x) = 3x - 2$$

en l'interval $[0, 2]$. Quina de les tres té un creixement més ràpid en aquest interval?

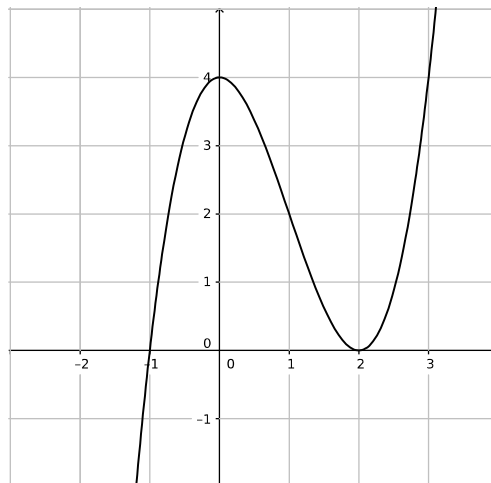
Derivada d'una funció en un punt

7. Fent servir la definició, calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 5x$ en el punt $x = -3$.
8. Fent servir la definició, calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 3x - 10$ en el punts en què s'anul·la l'ordenada.
9. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{2x + 1}$. Fent servir la definició de derivada en un punt calcula $f'(12)$.
10. Sigui la funció $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Fent servir la definició de derivada en un punt calcula $f'(2)$.
11. Quan llancem un objecte verticalment cap amunt segueix una trajectòria rectilínia descrita per l'expressió $y(t) = 40t - 5t^2$, on y està expressat en metres i t en segons. Calcula la velocitat en els instants $t = 0$ s, $t = 4$ s i $t = 6$ s.
12. Sigui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcula, fent servir derivades laterals $f'(2)$.

13. Sigui f la funció representada en el següent gràfic.



Ordena de major a menor les següents quantitats:

$$f'(-1), f'(0), f'(1), f'(2,1)$$

Funció derivada

14. Calcula la funció derivada de cadascuna de les següents funcions:

a) $f(x) = x^6$

b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

c) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{5}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[5]{x}}$

15. Calcula la funció derivada de cadascuna de les següents funcions:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

b) $f(x) = 2x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5$

c) $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$

f) $f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^4}}$

16. Sense fer-ne la representació gràfica indica si la funció $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ és creixent o decreixent en els punts d'abscissa $x = -1$, $x = 0$ i $x = 3$.

17. Calcula la derivada de la funció $f(x) = x^2 - 6x + 11$ i determina'n els intervals de creixement i decreixement.

18. Calcula la derivada de la funció $f(x) = x^3 + x$. Pot decreïxer en algun punt aquesta funció?

19. Per a quins valors de x s'anul·la la derivada de la funció $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 10$?

20. Calcula la funció derivada de cadascuna de les següents funcions:

a) $f(x) = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

b) $f(x) = 5\ln x - 3\log x$

c) $f(x) = \ln\sqrt{x^5}$

21. Calcula la funció derivada de cadascuna de les següents funcions:

a) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

b) $f(x) = \ln 16 \cdot \log_2(2x + 4)$

c) $f(x) = \ln(\cos(1 - x^2))$

d) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$

22. Calcula la derivada de la funció $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Interpreta'n el resultat obtingut.

23. Troba la derivada de la funció $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ fent servir la regla per calcular la derivada del quocient de dues funcions.

24. Calcula la funció derivada de cadascuna de les següents funcions:

a) $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = (3x + 5) \cdot \ln x$

c) $f(x) = (\sin(3x) + \cos(2x)) \cdot e^x$

d) $f(x) = (x^3 - 1) \cdot \sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{x + 4}{2x - 1}$

f) $f(x) = \frac{\cos x + 1}{\sin x}$

g) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$

i) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$

j) $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$

25. Calcula la derivada de la funció $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

26. Calcula la funció derivada de cadascuna de les següents funcions:

a) $f(x) = \frac{2x + 4}{e^{2x}}$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{2x + 3}$

c) $f(x) = \frac{2x + 3}{3x^2}$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

e) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin^3 x$

f) $f(x) = x^4 \cdot \cos^2 x$

g) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(2x)$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{2x + 3}{4x - 1}}$

27. Calcula la funció derivada de cadascuna de les següents funcions:

a) $f(x) = x\sqrt{3x^2 + 1}$

b) $f(x) = \left(\frac{3x - 4}{x - 1}\right)^2$

c) $f(x) = x^5 \cdot 3^x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^{\sin x}$

e) $f(x) = (3x)^{3x}$

f) $f(x) = \arcsin(e^x)$

g) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$

h) $f(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan x$

28. Calcula la derivada de la funció $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}}$.

Solucions

1. a) 0 b) 2 c) 4

2. a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{4}$

3. $y = 4x + 2$

4. $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

5. 7,85

6. La taxa de variació mitjana de f , g i h és 0, 4 i 3 respectivament. Creix més ràpid la g .

7. $f'(-3) = -13$

8. $f'(-2) = -7$ i $f'(5) = 7$

9. $f'(12) = \frac{1}{5}$

10. $f'(2) = -1$

11. $\dot{y}(0) = 40 \text{ ms}^{-1}$, $\dot{y}(4) = 0 \text{ ms}^{-1}$ i $\dot{y}(6) = -20 \text{ ms}^{-1}$

12. $f'(2) = -2$

13. $f'(1) < f'(0) < f'(2,1) < f'(-1)$

14. a) $f'(x) = 6x^5$ b) $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$ c) $f'(x) = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$

d) $f'(x) = \frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$ e) $f'(x) = 0$ f) $f'(x) = \frac{9\sqrt[5]{x^4}}{5}$

15. a) $f'(x) = 2x + 4$ b) $f'(x) = 10x^4 - 8x^3 + 6x$ c) $f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 3x$

d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ e) $f'(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{15}{4\sqrt[4]{x^7}}$ f) $f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$

16. Creixent a $x = -1$ i $x = 3$ i decreixent a $x = 0$.

17. $f'(x) = 2x - 6$. \forall $f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 3)$ i creixent en $(3, +\infty)$

18. $f'(x) = 3x^2 + 1$ \forall $(f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f(x)$ no pot decreïxer

19. S'anul·la a $x = 2$ i $x = -4$.

20. a) $f'(x) = \frac{\cos x}{2} - 3\sin x$ b) $f'(x) = \frac{5}{x} - \frac{3}{x \cdot \ln 10}$ c) $f(x) = \frac{5}{2x}$

21. a) $f'(x) = \frac{2}{x+1}$ b) $f'(x) = \frac{2}{x+2}$ c) $f(x) = 2x \tan(1 - x^2)$ d) $f(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$

22. $f'(x) = 0 \quad \forall$ $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és un funció constant

23. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

24. a) $f'(x) = (2x^2 + 6x + 4) \cdot e^{2x}$ b) $f'(x) = \frac{3x+5}{x} + 3 \cdot \ln x$

c) $f'(x) = (3 \cos(3x) + 2 \sin(3x) - 2 \sin(2x) + 2 \cos(2x)) \cdot e^x$ d) $f'(x) = \frac{7x^3 - 1}{2\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = \frac{-9}{(2x-1)^2}$ f) $f'(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ g) $f'(x) = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$ h) $f'(x) = \frac{-1}{e^x}$

i) $f'(x) = (x^2 \cdot \ln 2 + 2x) \cdot 2^x$ j) $f'(x) = \frac{x(2 - x \cdot \ln 2)}{2^x}$

25. $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$

26. a) $f'(x) = \frac{-4x-6}{e^{2x}}$ b) $f'(x) = \frac{6x^2+18x}{(2x+3)^2}$ c) $f'(x) = \frac{-2x-6}{3x^3}$ d) $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$

e) $f'(x) = e^{2x} \cdot \sin^2 x (2 \sin x + 3 \cos x)$ f) $f'(x) = -2x^3 \cdot \cos x (x \sin x - 2 \cos x)$

g) $f'(x) = e^{2x} \cdot \left[2 \ln(2x) + \frac{1}{x} \right]$ h) $f'(x) = \frac{-7}{\sqrt{(2x+3) \cdot (4x-1)^3}}$

27. a) $f'(x) = \frac{6x^2+1}{\sqrt{3x^2+1}}$ b) $f'(x) = \frac{2 \cdot (3x-4)}{(x-1)^3}$ c) $f'(x) = x^4 \cdot 3^x \cdot e^x \cdot [5 + (1 + \ln 3) \cdot x]$

d) $f'(x) = x^{\sin x} \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$ e) $f'(x) = 3 \cdot (3x)^{3x} \cdot [\ln(3x) + 1]$ f) $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

g) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$ h) $f'(x) = 0$

28. $f'(x) = \frac{2 \cos x}{\sin x \cdot (1 + \cos^2 x)}$