

Exercicis de primitives i integrals

Integrals immediates i quasi immediates

1. Calcula les següents integrals immediates:

a) $\int (2x^3 - 5x + 5) dx$

b) $\int \left(\frac{6}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx$

c) $\int (2e^x + 5^x) dx$

d) $\int (3 \sin x + 4 \cos x) dx$

e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

f) $\int \frac{dx}{1+x^2}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $\int (2x + x^2 + 2^x) dx$

h) $\int (x+4) \cdot (x-5) dx$

i) $\int \left(4 \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$

2. Calcula les següents integrals quasi immediates:

a) $\int (5x^3 - 7x^2)^4 \cdot (15x^2 - 14x) dx$

b) $\int \frac{3x+1}{15x^2+10x} dx$

c) $\int \cot x dx$

d) $\int x \sqrt[3]{2x^2+5} dx$

e) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$

f) $\int \sin x \cdot \cos x dx$

g) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$

h) $\int x \cdot e^{x^2+5} dx$

i) $\int \frac{8x}{1+4x^2} dx$

j) $\int \frac{8}{1+4x^2} dx$

k) $\int x \cos(x^2) dx$

l) $\int \frac{3e^{2x}}{\cos^2(e^{2x})} dx$

3. Calcula les següents integrals.

a) $\int \sin x dx$

b) $\int \cos x dx$

c) $\int \tan x dx$

d) $\int \sin^2 x dx$

e) $\int \cos^2 x dx$

f) $\int \tan^2 x dx$

g) $\int \sin^3 x dx$

h) $\int \cos^3 x dx$

i) $\int \tan^3 x dx$

Pista: Recorda les següents identitats trigonomètriques:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Integració per canvi de variable

4. Calcula les integrals següents fent el canvi de variable indicat:

a) $\int (x^3 - 5)^4 \cdot x^2 dx$ fent el canvi $t = x^3 - 5$

b) $\int \sqrt[4]{x^2 - 2x + 2} \cdot (x - 1) dx$ fent el canvi $t = x^2 - 2x + 2$

5. Calcula les integrals següents fent el canvi de variable indicat:

a) $\int x \cdot e^{x^2} dx$ fent el canvi $t = x^2$.

b) $\int \frac{dx}{4 + x^2}$ fent el canvi $x = 2t$.

c) $\int \frac{dx}{8 + x^2}$ fent el canvi $x = \sqrt{8}t$.

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{12 - x^2}}$ fent el canvi $x = \sqrt{12}t$.

6. Calcula les integrals següents fent el canvi de variable indicat:

a) $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ fent el canvi $x = 3 \sin t$.

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$ fent el canvi $t = \sqrt{x}$.

c) $\int \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ fent el canvi $x = t^6$.

d) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ fent el canvi $t = x^2$.

e) $\int x^3 \cdot \sqrt{1 - x^4} dx$ fent el canvi $t = 1 - x^4$.

f) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ fent el canvi $t = \ln x$.

Integració per parts

7. Aplica la fórmula d'integració per parts per calcular:

a) $\int \arccos x dx$ b) $\int x^2 \sin x dx$

c) $\int (x^2 + 3x + 1)e^x dx$ d) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

8. Aplica la fórmula d'integració per parts per calcular les següents integrals:

a) $\int x \cdot \sin 2x \, dx$

b) $\int e^{4x} \cos 3x \, dx$

c) $\int (x^2 - 6x) e^x \, dx$

9. Aplica la fórmula d'integració per parts per calcular les següents integrals:

a) $\int x \cdot \cos x \, dx$

b) $\int x^2 \cos x \, dx$

c) $\int x^3 \cos x \, dx$

Integrals racionals

10. Calcula les següents integrals racionals:

a) $\int \frac{3x-1}{x^2-1} \, dx$

b) $\int \frac{x^3-25x-1}{x+5} \, dx$

c) $\int \frac{2x^2+6x+18}{x^3-9x} \, dx$

11. Calcula les següents integrals racionals:

a) $\int \frac{5}{x^2-4x+4} \, dx$

b) $\int \frac{x^2-3}{x(x-1)(x-3)} \, dx$

c) $\int \frac{2x-2}{x^3-6x^2+11x-6} \, dx$

12. Calcula les següents integrals racionals:

a) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} \, dx$

b) $\int \frac{x^2-5}{x^3-3x^2+3x-1} \, dx$

13. Calcula les següents integrals racionals:

a) $\int \frac{x^2+25}{x^2-25} \, dx$

b) $\int \frac{2x^2}{x-1} \, dx$

Activitats finals

14. Troba la primitiva de la funció $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$ la gràfica de la qual passa pel punt (4, 6).

15. Calcula la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$ fent el canvi de variable $x=t^6$.

16. Determina les asímptotes de la funció $F(x) = \int \frac{3}{(x-1)^2} dx$ sabent que $F(2) = 5$.
17. Troba la primitiva de la funció $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$ la gràfica de la qual té per asímptota horitzontal la recta $y = 5$.

Solucions

1. a) $\frac{x^4}{2} - \frac{5x}{2} + 10x + C$ b) $-\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + 3\ln|x| + C$ c) $2e^x + \frac{5^x}{\ln 5} + C$ d) $-3\cos x + 4\sin x + C$ e) $\tan x + C$
 f) $\arctan x + C$ g) $\arcsin x + C$ f) $x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$ h) $\frac{x^3}{3} - x^2 - 24x + C$ i) $\frac{12x\sqrt[3]{x^2}}{5} - 12\sqrt[4]{x} + C$
2. a) $\frac{(5x^3 - 7x^2)^5}{5} + C$ b) $\frac{1}{10} \cdot \ln|15x^2 + 10x| + C$ c) $\ln|\sin x| + C$ d) $\frac{3\sqrt[3]{(2x^2 + 5)^4}}{16} + C$
 e) $\frac{1}{2} \ln|e^{2x} - 1| + C$ f) $\frac{1}{2} \sin^2 x + C$ g) $e^{\sin x} + C$ h) $\frac{1}{2} \cdot e^{x^2 + 5} + C$ i) $\ln|1 + 4x^2| + C$
 j) $4 \arctan(2x) + C$ k) $\sin(x^2) + C$ l) $\frac{3}{2} \cos^2(e^{2x})$
3. a) $-\cos x + C$ b) $-\sin x + C$ c) $-\ln|\cos x| + C$ d) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ e) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$
 f) $-x + \tan x + C$ g) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$ h) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ i) $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$
4. a) $\frac{1}{15}(x^3 - 5)^5 + C$ b) $\frac{2}{5}(x^2 - 2x + 2)^{\frac{5}{4}} + C$
5. a) $\frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$ b) $\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{4} + C$ d) $\arcsin \frac{\sqrt{3}x}{6} + C$
6. a) $\frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + C$ b) $2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C$ c) $\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{6x\sqrt[6]{x}}{7} + C$ d) $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$
 e) $-\frac{1}{6} \sqrt{(1 - x^4)^3} + C$ f) $\frac{\ln^4 x}{4} + C$
7. a) $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$ b) $-(x^2 - 2)\cos x + 2x \sin x + C$ c) $x(x + 1)e^x + C$ d) $-\frac{2\ln x + 1}{4x^2} + C$
8. a) $-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ b) $\frac{1}{25}(3\sin 3x + 4\cos 3x) \cdot e^{4x} + C$ c) $(x^2 - 8x + 8)e^x$
9. a) $x \sin x + \cos x + C$ b) $(x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C$ c) $3(x^2 - 2)\cos x + (x^3 - 6x)\sin x + C$
10. a) $\ln|x - 1| + 2\ln|x + 1| + C$ b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \ln|x + 5| + C$ c) $3\ln|x - 3| + \ln|x + 3| - 2\ln|x| + C$
11. a) $-\frac{5}{x - 2} + C$ b) $\ln|x - 3| + \ln|x - 1| - \ln|x| + C$ c) $2\ln|x - 3| - 2\ln|x - 2| + C$
12. a) $\frac{1}{2} \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{4}{x - 1} + C$ b) $\ln|x - 1| - \frac{2(x - 2)}{x^2 - 2x + 1} + C$
13. a) $x + 5 \ln|x - 5| - 5 \ln|x + 5| + C$ b) $x^2 + 2x - 2 \ln|x - 1| + C$
14. $F(x) = x + 8 \ln|x - 3| + 2$

15. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$

16. Té una asymptota vertical en $x=1$ i una asymptota horitzontal en $y=8$.

17. $\frac{-4}{x-3} + 5$