Exercicis d'aplicacions de les derivades

Rectes tangents

1. Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

2. Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el punt d'abscissa $x = -2$.

3. Troba les equacions de les rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 6x + 2$ en els punts d'ordenada $y = 2$.

4. Troba l'equació de la recta normal a la funció $f(x) = \left(x^2 + 2\right) \cdot e^x$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

5. Troba els angles amb què la funció $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2}$ talla a l'eix OX.

6. Determina les equacions de les rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x) = x^2$ que passen pel punt $(2,3)$.

7. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + k}{x + 1}$, troba el valor del paràmetre k sabent que la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en $x = 1$ té pendent 2.

8. Donades la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - 7$ i les rectes $r: 2x + y - 5 = 0$ i $s: x + y = 2$,

a) Explica, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$ en algun punt.

b) En cas que alguna d'elles ho sigui, troba el punt de tangència.

9. Donades les funcions $f(x) = x^2 + ax + 1$ i $g(x) = 2x^2 + b$, calcula a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és adir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.

Derivabilitat

10. Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

11. Digués en quins punts no són derivables les funcions següents i indica'n el motiu.

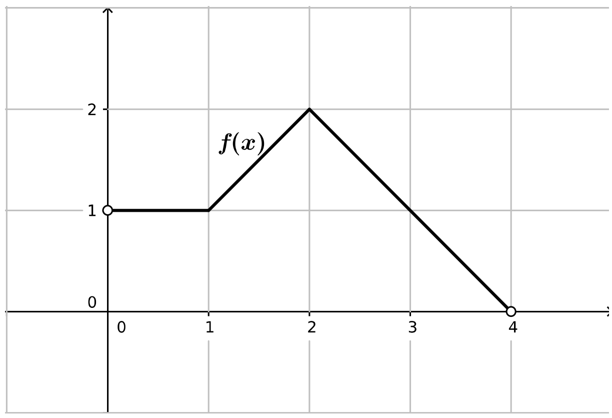
a) $f(x)=\dfrac{3x-6}{(x-1)^2}$ b) $g(x)=|x-3|$ c) $h(x)=\sqrt[5]{x}$

12. Donada la funció:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2+3x+2 & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$$

Troba els valors dels paràmetres a i b perquè sigui derivable en $x=-1$.

13. Considereu la funció $f(x)$ definida per a $x\in(0,4)$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Troba l'expressió algebraica de la funció $f(x)$ com a funció definida a trossos.

b) Troba l'expressió de la seva funció derivada $f'(x)$ quan existeix.

14. Estudia la derivabilitat de les funcions següents i escriu l'expressió de la funció derivada.

a) $f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

c) $f(x)=|2x-6|$ d) $f(x)=|x^2-4|$

Monotonia d'una funció. Punts estacionaris

15. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^3 - 12x + 6$.

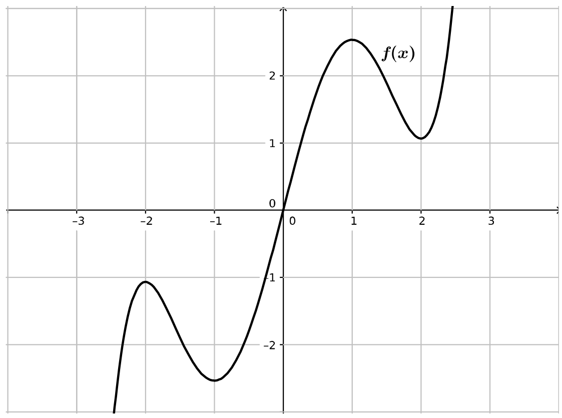
16. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$.

17. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = (x^2 + 4x + 4)\cdot e^{x+1}$.

18. La funció $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ és creixent o decreixent en $x = 2$? Justifica la resposta.

19. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

20. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció representada gràficament a continuació



21. Classifica els punts estacionaris de la funció $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 1$.

22. Classifica els punts estacionaris de la funció $f(x) = \dfrac{8x + 20}{x^2 - 4}$.

23. Sabent que la gràfica de la funció $f(x) = x^2 + bx + c$ té un mínim en el punt $(3, -1)$ calcula b i c.

24. Classifica els punts estacionaris de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

25. Classifica els punts estacionaris de la funció $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$.

26. Classifica els punts estacionaris de la funció $f(x) = e^{x^3 - 3x + 1}$.

Curvatura d'una funció. Punts d'inflexió

27. Troba els intervals de concavitat i convexitat de la funció $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2$.

28. Troba els intervals de concavitat i convexitat de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2}$.

29. Troba els punts d'inflexió de la funció $f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^x$.

Optimització

30. Descompon el nombre 25 en dos sumands tals que el doble del quadrat del primer més el triple del quadrat del segon sigui mínim.

31. Es vol tancar un camp rectangular que està a la vora d'un camí. Si la tanca del costat del camí costa 80 €/m i la dels altres costats 10 €/m, troba les dimensions del camp amb major àrea que es pot envoltar amb 28800 €.

Activitats finals

32. Donada la funció $f(x) = x \cdot e^x$, determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica en el seu punt d'inflexió.

33. Donada la funció $f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right)$,

a) determina els intervals de creixement i decreixement de la funció

b) i troba l'equació de la recta tangent en el punt d'inflexió d'abscissa positiva.

Solucions

1. $y=-2x+4$

2. $y=-x-4$

3. $y=-6x+2 \qquad y=6x-34$

4. $y=-\dfrac{x}{2}+2$

5. $\pm\dfrac{\pi}{3}=\pm 60°$

6. $y=2x-1 \qquad y=6x-9$

7. $k=-5$

8. a) La recta s. b) $(3,-1)$

9. $a=-2 \ \wedge \ b=2$

10. $f(x)$ és contínua $\forall\ x\in\mathbb{R}$. $f(x)$ és derivable $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

11. a) $f(x)$ no és derivable en $x=1$ perquè $f(0)$ no està definida.

b) $g(x)$ no és derivable en $x=3$ perquè té un punt angulós.

c) $h(x)$ no és derivable en $x=0$ perquè té un punt de tangent vertical.

12. $a=b=1$

13. a) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<x\le 1\\ x & \text{si } 1<x\le 2\\ 4-x & \text{si } 2<x<4\end{cases}$ b) $f'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } 0<x<1\\ 1 & \text{si } 1<x<2\\ -1 & \text{si } 2<x<4\end{cases}$

14. a) $f(x)$ derivable $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{2\}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<2\\ 2 & \text{si } x>2\end{cases}$

b) $f(x)$ derivable $\forall\ x\in\mathbb{R}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

c) $f(x)$ derivable $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{3\}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<3\\ 2 & \text{si } x>3\end{cases}$

d) $f(x)$ derivable $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<-2\\ -2x & \text{si } -2<x<2\\ 2x & \text{si } x>2\end{cases}$

15.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	Màx.	↘	Mín.	↗

16.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	$\nexists$	–
$f(x)$	↘	Mín.	↗	$\nexists$	↘

17.

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	Màx.	↘	Mín.	↗

18. És creixent degut a que $f'(2) < 0$

19.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	$\nexists$	–	0	+
$f(x)$	↗	Màx.	↘	$\nexists$	↘	Mín.	↗

20.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	Màx.	↘	Mín.	↗	Màx.	↘	Mín.	↗

21. La funció té un mínim relatiu a $(0, 1)$ i un punt d'inflexió de tangent horitzontal a $(-1, 2)$.

22. La funció té un màxim relatiu a $(-4, -1)$ i un mínim relatiu a $(-1, -4)$.

23. $b = -6 \ \wedge \ c = 8$

24. Té un mínim relatiu a $(0, 0)$.

25. La funció té un màxim relatiu a $(2, -8)$ i dos mínims relatius a $(1, -9)$ i $(3, -9)$.

26. La funció té un màxim relatiu a $(-1, \mathrm{e})$ i un mínim relatiu a $(1, \mathrm{e}^{-3})$.

27.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	⌣	P.I.	⌢	P.I.	⌣

28.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–	$\nexists$	+
$f(x)$	⌢	P.I.	⌣	P.I.	⌢	$\nexists$	⌣

29. La funció té un punt d'inflexió de tangent horitzontal a $\left(-1, \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$ i un punt d'inflexió de tangent no horitontal a $\left(-3, \dfrac{10}{\mathrm{e}^3}\right)$.

30. Els dos nombres són 15 i 10.

31. 160 metres per 720 metres

32. $y = \dfrac{-x-4}{\mathrm{e}^2}$

33. a) $f(x)$ és decreixent en $(-\infty, 0)$ i creixent a $(0, \infty)$ b) $y = \dfrac{x}{2} - 1 + 3 \cdot \ln 2$