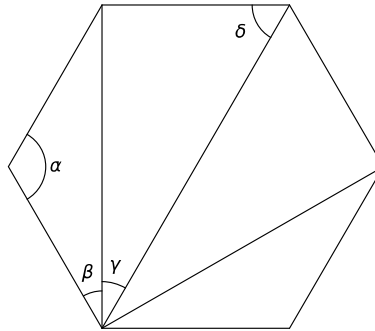


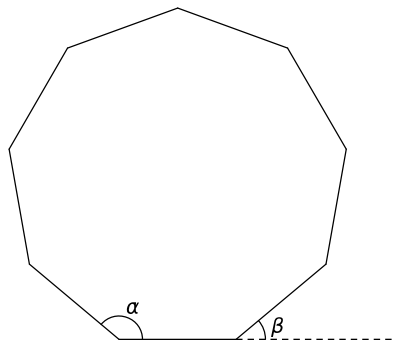
Exercicis de trigonometria

Mesura d'angles

- En una circumferència de 25 cm de radi, un arc fa 1,2 m. Troba el seu angle central corresponent en radians i en graus sexagesimals.
- Expressa en radians de manera exacta els angles següents, donats en graus:
a) 0° b) 40° c) 72° d) 210° e) 400°
- Expressa en radians els angles de la següent figura:



- Expressa en radians els angles de la següent figura:

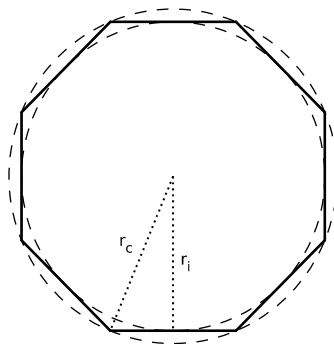


- Completa la següent taula:

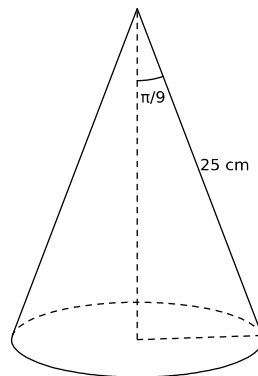
α ($^\circ$)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α (rad)					$\frac{\pi}{2}$				

Raons trigonomètriques d'un angle agut

6. El costat desigual d'un triangle isòsceles fa 34 cm i l'angle oposat 50° . Calcula el perímetre del triangle i la seva àrea.
7. Els braços d'un compàs mesuren 12 centímetres. Calcula l'angle que formen els braços del compàs quan hi tracem una circumferència de 5 centímetres de diàmetre.
8. Calcula el radi de les circumferències inscrita i circumscrita d'un octàgon regular de 12 cm de costat.



9. Calcula el volum d'un con si la generatriu fa 25 cm i l'angle que forma amb l'altura és de $\frac{\pi}{9}$ rad.



10. Des de terra veiem el terrat d'un gratacel sota un angle de 60° . Amb quin angle el veuríem des d'una distància al peu del gratacel doble de l'anterior?
11. Des de un punt del terra es veu el punt més alt d'una torre sota un angle de 32° . Si s'avança 25 m en direcció a la torre, l'angle és de 47° . Calcula l'alçada de la torre.

Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

12. Busca les següents raons trigonomètriques d'angles donats en radians. Expressa el resultat amb tres xifres decimals:
- a) $\sin(1,95)$ b) $\cos(-0,75)$ c) $\tan(1,57)$ d) $\csc(4,25)$
13. Indica quin és el signe de cadascuna de les raons trigonomètriques dels següents angles: 45° , 230° , 315° , 450° , 720° i 1000° .
14. a) Si $\sin\alpha = -0,8$, en quin quadrant pot estar l'angle α ?
b) Si $\cos\beta = -0,3$, en quin quadrant pot estar l'angle β ?
c) Si $\tan\gamma = -1,5$, en quin quadrant pot estar l'angle γ ?
15. Busca els angles més petits que 360° que satisfan les condicions següents:
- a) $\sin\alpha = 0,11$ b) $\cos\alpha = -0,62$ c) $\tan\alpha = 3,28$
d) $\csc\alpha = 1,5$ e) $\sec\alpha = 2,43$ f) $\cot\alpha = 0,19$
16. Calcula de manera exacta les raons trigonomètriques d'un angle α del segon quadrant, sabent que $\sin\alpha = 0,28$.
17. Calcula de manera exacta les raons trigonomètriques d'un angle α del quart quadrant, sabent que $\tan\alpha = -0,225$.
18. Calcula de manera exacta les raons trigonomètriques d'un angle α del tercer quadrant, sabent que $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$.

Reducció al primer quadrant

19. Relaciona les raons trigonomètriques de l'angle de 210° amb les d'un angle del primer quadrant.
20. Considera un angle de 850° . Redueix-lo a un angle més petit de 360° i relaciona'n les raons trigonomètriques amb les d'un angle del primer quadrant.
21. Un angle β tal que $0^\circ < \beta < 360^\circ$ verifica: $\sin\beta = -\sin 30^\circ$ i $\cos\beta = \cos 30^\circ$.
- a) A quin quadrant pertany l'angle β ?
b) Quant mesura β ?

22. Calcula de manera exacta les raons trigonomètriques dels següents angles 150° , 225° , 240° , 330° , 405° i 570° .
23. a) Determina tots els angles compresos entre 0° i 360° la tangent dels quals sigui igual a -1 .
b) Determina tots els angles compresos entre 0° i 360° el sinus dels quals sigui igual a $-\frac{1}{2}$.
24. Si $\sin\alpha=0,6$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula: $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sin(\pi-\alpha)$, $\cos(\pi-\alpha)$ i α .
25. Si $\cos\alpha=-0,96$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcula: $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\sin(-\alpha)$, $\cos(-\alpha)$, $\tan(-\alpha)$ i α .

Raons de la suma i de la diferència de dos angles. Raons dels angles doble i meitat

26. a) Dedueix una expressió que et permeti calcular $\sin(3\alpha)$ en funció de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
b) Dedueix una expressió que et permeti calcular $\cos(3\alpha)$ en funció de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
c) Fes servir les expressions dels apartats anteriors i les raons trigonomètriques de 30° per calcular el sinus i el cosinus de 90° .
27. a) Dedueix una expressió que et permeti calcular $\sin(4\alpha)$ en funció de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
b) Dedueix una expressió que et permeti calcular $\cos(4\alpha)$ en funció de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
28. Sense utilitzar la calculadora, determina les raons trigonomètriques dels angles de 75° i 15° a partir de les raons trigonomètriques dels angles de 45° i 30° .
29. Sabent que $\cos\alpha=0,8$, amb $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ i $\sin\beta=0,6$, amb $90^\circ < \beta < 180^\circ$, calcula:
- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $\sin(\alpha+\beta)$ | b) $\cos(\alpha+\beta)$ | c) $\sin(\alpha-\beta)$ | d) $\cos(\alpha-\beta)$ |
| e) $\sin(2\alpha)$ | f) $\cos(2\alpha)$ | g) $\sin(2\beta)$ | h) $\cos(2\beta)$ |
30. Sabent que $\tan\alpha=2$ i $\tan\beta=4$, calcula:
- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------|-------------------|
| a) $\tan(\alpha+\beta)$ | b) $\tan(\alpha-\beta)$ | c) $\tan(2\alpha)$ | d) $\tan(2\beta)$ |
|-------------------------|-------------------------|--------------------|-------------------|
31. Sabent que $\sin\theta=-0,8$, amb $180^\circ < \theta < 270^\circ$, calcula:
- | | | |
|--|--|--|
| a) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | b) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | c) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ |
|--|--|--|

32. Resol les següents equacions trigonomètriques:

a) $\tan x = 5 \sin x$

b) $\cos x = \sin(2x)$

c) $\cos(2x) + 3 \sin x = 2$

d) $\sin x + \cos(2x) = 1$

e) $\cos(3x) + \sin x = \cos x$

f) $\tan(2x) \cdot \tan x = 1$

g) $\sin(2x) = \tan x$

h) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

33. Resol els següents sistemes d'equacions trigonomètriques:

a)
$$\left. \begin{aligned} \sin x + \sin y &= \frac{3}{2} \\ \sin x - \sin y &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

b)
$$\left. \begin{aligned} \sin x \cdot \sin y &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos x \cdot \sin y &= \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned} \right\}$$

Teoremes del sinus i del cosinus

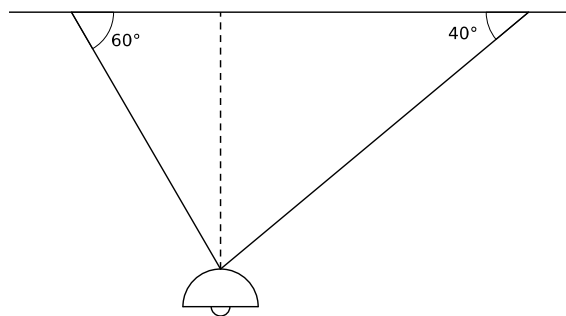
34. Resol el triangle en què coneixem $a=6$ cm, $b=8$ cm i $\hat{C}=75^\circ$.

35. Els costats d'un triangle mesuren $a=24$ cm, $b=30$ cm i $c=45$ cm. Calcula'n els tres angles.

36. Volem penjar un llum a una certa distància del sostre d'una habitació. Per fer-ho, agafem una corda, hi lliguem el llum i la clavem pels extrems en dos punts del sostre separats per una distància de 140 centímetres, de manera que els angles entre la corda i el sostre són de 40° i 60° a cada un dels extrems.

a) Quina serà la longitud total de la corda?

b) A quina distància del sostre quedarà el llum?



37. Realitzant el mínim nombre de càlculs possible, classifica aquests triangles segons els seus angles:

a) $a = 10$ cm, $b = 8$ cm i $c = 7$ cm

b) $a = 7$ cm, $b = 12$ cm i $c = 15$ cm

c) $a = 20$ cm, $b = 29$ cm i $c = 21$ cm

Solucions

1. $4,8 \text{ rad} \approx 275,01974166\dots^\circ \approx 275^\circ 1' 11,06''$

2. a) 0 b) $\frac{2\pi}{9}$ c) $\frac{2\pi}{5}$ d) $\frac{7\pi}{6}$ e) $\frac{20\pi}{9}$

3. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$ i $\delta = \frac{\pi}{3}$

4. $\alpha = \frac{7\pi}{9}$ i $\beta = \frac{2\pi}{9}$

5.

$\alpha (^\circ)$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\alpha (\text{rad})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

6. $P = 34 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin 25^\circ}\right) \approx 114,45 \text{ cm}$ i $A = \frac{289}{\tan 25^\circ} \approx 619,76 \text{ cm}^2$

7. $\alpha = \arcsin \frac{1,25}{12} \approx 11,96^\circ$

8. $r_i = \frac{6}{\tan 22,5^\circ} \approx 14,49 \text{ cm}$ i $r_c = \frac{6}{\sin 22,5^\circ} \approx 15,68 \text{ cm}$

9. $V = \frac{15625 \cdot \pi \cdot \sin^2 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{3} \approx 1798,61 \text{ cm}^3$

10. $\alpha = \arctan \left(\frac{\tan 60^\circ}{2}\right) = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 40,89^\circ$

11. $h = \frac{25 \cdot \tan 47^\circ \cdot \tan 32^\circ}{\tan 47^\circ - \tan 32^\circ} \approx 37,44 \text{ m}$

12. a) 0,929 b) 0,732 c) 1255,766 d) -1,117

13.

α	45°	230°	315°	450°	720°	1000°
$\sin \alpha$	+	-	-	+	0	-
$\cos \alpha$	+	-	+	0	+	+
$\tan \alpha$	+	+	-	∞	0	-

14. a) Quadrants III o IV b) Quadrants II o III c) Quadrants II o IV

15. a) $\alpha_1 = 6,32^\circ$ i $\alpha_2 = 173,68^\circ$ b) $\alpha_1 = 128,32^\circ$ i $\alpha_2 = 231,68^\circ$

c) $\alpha_1 = 73,04^\circ$ i $\alpha_2 = 253,04^\circ$ d) $\alpha_1 = 41,81^\circ$ i $\alpha_2 = 138,19^\circ$

e) $\alpha_1 = 65,70^\circ$ i $\alpha_2 = 294,30^\circ$ f) $\alpha_1 = 79,24^\circ$ i $\alpha_2 = 259,24^\circ$

16. $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$ $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$
17. $\sin \alpha = -\frac{9}{41}$ $\cos \alpha = \frac{40}{41}$ $\tan \alpha = -\frac{9}{40}$
18. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ $\tan \alpha = \frac{5}{12}$
19. $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$ $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ$ $\tan 210^\circ = -\tan 30^\circ$
20. $\sin 850^\circ = \sin 130^\circ = \sin 50^\circ$
 $\cos 850^\circ = \cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$
 $\tan 850^\circ = \tan 130^\circ = -\tan 50^\circ$
21. a) Al quadrant IV b) 330°
- 22.

α	150°	225°	240°	330°	405°	570°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

23. a) $\alpha_1 = 135^\circ$ i $\alpha_2 = 315^\circ$ b) $\alpha_1 = 210^\circ$ i $\alpha_2 = 330^\circ$
24. $\cos \alpha = -0,8$, $\tan \alpha = -0,75$, $\sin(\pi - \alpha) = 0,6$, $\cos(\pi - \alpha) = 0,8$ i $\alpha \approx 143,13^\circ$
25. $\sin \alpha = -0,28$, $\tan \alpha \approx 0,292$, $\sin(-\alpha) = 0,28$, $\cos(-\alpha) = 0,96$, $\tan(-\alpha) \approx 0,292$ i $\alpha \approx 196,26^\circ$
26. a) $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ b) $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ c) $\sin 90^\circ = 0$ $\cos 90^\circ = 1$
27. a) $\sin(4\alpha) = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$ b) $\cos(4\alpha) = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$
28. $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
29. a) $\sin(\alpha + \beta) = 0$ b) $\cos(\alpha + \beta) = -1$ c) $\sin(\alpha - \beta) = -0,96$ d) $\cos(\alpha - \beta) = -0,28$
e) $\sin(2\alpha) = 0,96$ f) $\cos(2\alpha) = 0,28$ g) $\sin(2\beta) = -0,96$ h) $\cos(2\beta) = 0,28$
30. a) $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{6}{7}$ b) $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{2}{9}$ c) $\tan(2\alpha) = -\frac{4}{3}$ d) $\tan(2\beta) = -\frac{8}{15}$
31. a) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx 0,894$ b) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx -0,447$ c) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx -2$
32. a) $0^\circ, 78,46^\circ, 180^\circ$ i $281,54^\circ$ b) $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ i 270°
c) $30^\circ, 90^\circ$ i 150° d) $0^\circ, 30^\circ, 150^\circ$ i 180°
e) $0^\circ, 15^\circ, 75^\circ$ i 180° f) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$ i 330°
g) $0^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ$ i 180° h) $0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ i 270°

33. a) $\begin{cases} x=30^\circ \text{ o } 150^\circ \\ y=90^\circ \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=30^\circ, 150^\circ, 210^\circ \text{ o } 330^\circ \\ y=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ \text{ o } 315^\circ \end{cases}$
34. $c \approx 8,67 \text{ cm}$ $\hat{A} \approx 41,95^\circ$ $\hat{B} \approx 63,05^\circ$
35. $\hat{A} \approx 29,54^\circ$ $\hat{B} \approx 38,05^\circ$ $\hat{C} \approx 112,41^\circ$
36. a) $L = \frac{140 \cdot (\sin 40^\circ + \sin 60^\circ)}{\sin 80^\circ} \approx 214,49 \text{ cm}$ b) $h = \frac{140 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 79,14 \text{ cm}$
37. a) Acutangle b) Obtusangle c) Rectangle

Resolució de l'apartat e) de l'exercici 32

$$\begin{aligned} \cos(3x) + \sin x &= \cos x && \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + \sin x = \cos x \\ &&& \Rightarrow \cos^3 x - \cos x - 3\sin^2 x \cos x + \sin x = 0 \\ &&& \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) - 3\sin^2 x \cos x + \sin x = 0 \\ &&& \Rightarrow \cos x (-\sin^2 x) - 3\sin^2 x \cos x + \sin x = 0 \\ &&& \Rightarrow -4\sin^2 x \cos x + \sin x = 0 \\ &&& \Rightarrow \sin x (-4\sin x \cos x + 1) = 0 \\ &&& \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \sin x (-2\sin(2x) + 1) = 0 \\ &&& \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & \Rightarrow x = 0^\circ \wedge x = 180^\circ \\ -2\sin(2x) + 1 = 0 & \Rightarrow 2x = 30^\circ \wedge 2x = 150^\circ \Rightarrow x = 15^\circ \wedge x = 75^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) Aquí he fet servir el resultat de l'exercici 26.b) deduït a classe.
(2) I aquí he fet servir la fórmula de l'angle doble que teniu al formulari.

Resolució de l'apartat h) de l'exercici 32

$$\begin{aligned} \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) &= 0 && \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sin x + 2\sin x \cos x + 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0 \\ &&& \Rightarrow \sin x (1 + 2\cos x + 3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \\ &&& \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \sin x (1 + 2\cos x + 3\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = 0 \\ &&& \Rightarrow \sin x (2\cos x + 4\cos^2 x) = 0 \\ &&& \Rightarrow 2\sin x \cos x (1 + 2\cos x) = 0 \\ &&& \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & \Rightarrow x = 0^\circ \wedge x = 180^\circ \\ \cos x = 0 & \Rightarrow x = 90^\circ \wedge x = 270^\circ \\ 1 + 2\cos x = 0 & \Rightarrow 2x = 120^\circ \wedge 2x = 240^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) Aquí he fet servir el resultat de l'exercici 26.a) deduït a classe.
(2) I aquí he fet servir la identitat fonamental de la trigonometria.