

Exercicis de polinomis

Operacions amb polinomis

1. Efectua les següents operacions amb monomis:

a) $5x^4 \cdot (-3x^2)$ b) $\left(\frac{12}{10}t^7\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}t^3\right)$ c) $\left(\frac{14}{21}x^3\right)^5$

d) $\frac{-135x^6}{15x^3}$ e) $\frac{\frac{7}{8}z^7}{\frac{3}{4}z^3}$ f) $\frac{\sqrt{75}a^{10}}{\sqrt{3}a^2}$

2. Efectua els següents productes de polinomis:

a) $-2x^3 \cdot (-3x^2 + 5x - 6)$
b) $(x^2 + 3) \cdot (-2x^2 + 5)$
c) $(t^4 - 2t^3) \cdot (2t^2 - 3t)$

3. Efectua les següents divisions de polinomis indicant en cada cas el quocient $Q(x)$ i el residu $R(x)$:

a) $(2x^5 - x^4 + 9x^3 + 4x^2 + 6x + 4) : (2x^3 - x^2 + 3x + 1)$
b) $(2x^5 + 5x^4 - x^3 + 2x^2 + 7x + 2) : (x^2 + 2x - 1)$
c) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 9) : (x^2 - 3x + 3)$

4. Indica quin és el grau dels següents polinomis:

a) $(3x^2 + 7x - 5)^{15}$ b) $(6x^5 - 7x^4 - 3x^3) \cdot (-5x^4 - 3x^5 + 2x^8)$

5. Efectua les següents operacions aplicant les identitats notables:

a) $(x+3)^2$ b) $(5x^2+7)^2$ c) $(2x-3)^2$
d) $(2x-5) \cdot (2x+5)$ e) $(\sqrt{2}x - \sqrt{50})^2$

6. Calcula a i b per tal que es verifiqui la igualtat:

$$(x^2 + bx - 3) \cdot (ax + 4) = 2x^3 - 2x^2 - 18x - 12$$

Fórmula del binomi de Newton

7. Calcula el valor de les següents expressions:

a) $\frac{12!}{3! \cdot 9!}$

b) $\frac{20!}{15! \cdot 5!}$

c) $\frac{100!}{98! \cdot 2!}$

d) $\frac{1000!}{2! \cdot 998!}$

8. Calcula els nombres combinatoris següents:

a) $\binom{9}{2}$

b) $\binom{15}{4}$

c) $\binom{70}{2}$

d) $\binom{12}{3}$

e) $\binom{12}{9}$

f) $\binom{8}{0}$

9. Calcula les següents potències fent servir la fórmula del binomi de Newton:

a) $(x+2)^3$

b) $(x-1)^4$

c) $(2x+3)^3$

d) $(2x+1)^5$

e) $(2x-3)^3$

f) $(x-2)^6$

10. Desenvolupa les potències següents:

a) $(2x+y)^4$

b) $(3x+2t)^3$

c) $(5a-3b)^5$

11. Calcula les següents potències fent servir la fórmula del binomi de Newton:

a) $(\sqrt{2}x+4)^4$

b) $(\sqrt{3}x-1)^5$

c) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}\right)^3$

12. Determina el coeficient de x^8 en el desenvolupament de $(x^2-2x)^5$

Valor numèric. Teorema del residu

13. Calcula el valor numèric del polinomi $p(x)=x^3-2x^2+5x-3$ per $x=1$, $x=-2$, $x=0$, $x=\frac{3}{2}$ i $x=\sqrt{3}$.

14. Quin és el polinomi de primer grau $P(x)$ que verifica $P(1)=-1$ i $P(2)=1$?

15. Quin polinomi de primer grau $Q(x)$ hi ha que verifiqui $Q(-1)=2$?

16. Hi ha algun polinomi de primer grau $R(x)$ que verifiqui $R(-2)=1$, $R(-1)=-1$ i $R(3)=4$?

17. Quin és el polinomi de segon grau $S(x)$ que verifica $S(1)=2$ i $S(0)=-1$ i $S(2)=7$?

18. Quin polinomi de segon grau $T(x)$ verifica $T(3)=1$ i $T(-1)=2$?
19. Calcula el valor de m perquè el polinomi $P(x)=2x^3-5x^2+mx-3$ tingui valor numèric 10 quan x prengui el valor 3.
20. Sense efectuar la divisió, calcula el residu de les divisions següents:
- $(2x^4-6x^3+5x^2+9x-12) \div (x+1)$
 - $(x^5-4x^2+6x+3) \div (x-2)$
 - $(x^5-4x^2+6x+3) \div (x+3)$
21. Calcula el residu de les divisions següents, aplicant el teorema del residu:
- $(x^{76}+x^{50}-2x^{25}+x^5) \div (x-1)$
 - $(x^6-2x^5+7x) \div (x-2)$
22. Troba a i b per tal que el residu de dividir $p(x)=x^3+ax^2+bx-1$ per $x+2$ sigui 1 i que el residu de dividir-lo per $x+1$ sigui també 1.

Arrels d'un polinomi. Divisibilitat de polinomis.

23. Comprova que $p(x)=x^3-3x^2-6x+8$ és divisible per $x+2$. Expressa el polinomi $p(x)$ com a producte de dos polinomis.
24. Calcula k perquè el polinomi $p(x)=2x^3+4x^2-kx-1$ sigui divisible per $x+2$.
25. Comproveu si algun dels números 1, 2, 3 i 4 és una arrel del polinomi $p(x)=x^4-7x^2-6x$
26. Determina les arrels dels següents polinomis:
- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| a) $p(x)=(x^2-4) \cdot (2x-9)$ | b) $q(x)=x^4-15x^2-16$ |
| c) $r(x)=x^4-9x^2+14$ | d) $s(x)=x^6-9x^3+8$ |
27. Determina les arrels enteres dels següents polinomis:
- $p(x)=x^4+2x^3-15x^2+4x+20$
 - $q(x)=x^5-5x^4-5x^3+25x^2+4x-20$
 - $r(x)=12x^4-84x^3+108x^2+84x-120$

28. Determina les arrels racionals dels següents polinomis:

a) $p(x) = 100x^4 - 60x^3 - 17x^2 + 15x - 2$

29. Calculeu el valor de a perquè el polinomi $P(x) = x^4 - 2x^2 + ax - 6$ tingui com a arrel el nombre 3.

30. Calculeu els valors de a i b perquè el polinomi $Q(x) = x^3 - ax^2 + 2bx + 8$ tingui com a arrels els nombres 2 i 4.

Factorització de polinomis

31. Factoritza aquests polinomis:

a) $x^2 - 11x + 30$

b) $9x^2 + 30x + 25$

c) $\frac{x^2}{9} - 9$

d) $x^4 + 3x^3 + 2x^2$

e) $x^2 - 1$

f) $x^4 - 1$

32. Factoritza aquests polinomis:

a) $x^3 - 1$

b) $x^5 + x^4 - x - 1$

c) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

d) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 24x - 36$

e) $x^5 - 8x^4 + 18x^3 - 27x$

f) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

g) $x^3 + 4x^2 - 5x - 20$

h) $x^3 + 4x^2 + 5x + 20$

33. Les arrels d'un polinomi de tercer grau són 3 i -1, sent aquesta una arrel doble, i el coeficient de x^3 és 6. Quin és aquest polinomi?

34. Calcula el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple dels polinomis:

$$p(x) = 6x^2 - 6x - 72$$

$$q(x) = 8x^3 - 8x^2 - 128x + 128$$

35. Troba el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple dels polinomis:

$$p(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$q(x) = x^2 + 3x + 2$$

Comprova que el producte dels dos polinomis que acabes de trobar coincideix amb el producte dels dos polinomis de l'enunciat.

36. Troba el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple dels polinomis:

$$p(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$

$$q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$r(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

Fraccions algebraiques

37. Quines de les següents fraccions algebraiques són equivalents:

$$A(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$$

$$B(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$$

$$C(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$E(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6}$$

38. Calcula:

$$a) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

$$b) \frac{x-3}{x^2-1} - \frac{x+5}{x^2+4x+3}$$

39. Calcula:

$$a) \frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} \cdot \frac{x+1}{2x+4}$$

$$b) \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-4x} \div \frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}$$

40. Resol les següents equacions:

$$a) \frac{x+1}{3x-6} - \frac{x-1}{2x+4} = \frac{10-x^2}{6x^2-24}$$

$$b) \frac{x-3}{x-4} - \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-6}{x-7} - \frac{x-7}{x-8}$$

Solucions

1. a) $-15x^6$ b) $-\frac{2}{3}t^{10}$ c) $\frac{32}{243}x^{15}$ d) $-9x^3$ e) $\frac{7}{6}z^4$ f) $5a^8$
2. a) $6x^5 - 10x^4 + 12x^3$ b) $-2x^4 - x^2 + 15$ c) $2t^6 - 7t^5 + 6t^4$
3. a) $Q(x) = x^2 + 3$ $R(x) = 6x^2 - 3x + 1$
 b) $Q(x) = 2x^3 + x^2 - x + 5$ $R(x) = -4x + 7$
 c) $Q(x) = x^2 - 2x + 2$ $R(x) = 3$
4. a) 30 b) 13
5. a) $x^2 + 6x + 9$ b) $25x^4 + 70x^2 + 49$ c) $4x^2 - 12x + 9$
 d) $4x^2 - 25$ e) $2x^2 - 20x + 50$
6. $a = 2$ i $b = -3$
7. a) 220 b) 15504 c) 4950 d) 499500
8. a) 15 b) 1365 c) 2415 d) 220 e) 220 f) 1
9. a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ c) $(2x + 3)^3$
 d) $32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$
 e) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
 f) $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$
10. a) $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$
 b) $27x^3 + 54x^2t + 36xt^2 + 8t^3$
 c) $3125a^5 - 9375a^4b + 11250a^3b^2 - 6750a^2b^3 + 2025ab^4 - 243b^5$
11. a) $4x^4 + 32\sqrt{2}x^3 + 192x^2 + 256\sqrt{2}x + 256$
 b) $9\sqrt{3}x^5 - 45x^4 + 30\sqrt{3}x^3 - 30x^2 + 5\sqrt{3}x - 1$
 c) $\frac{8x^3}{27} - x^2 + \frac{9x}{8} - \frac{27}{64}$
12. 40
13. $p(1) = 1$ $p(-2) = -29$ $p(0) = -3$ $p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$ $p(\sqrt{3}) = 8\sqrt{3} - 9$
14. $P(x) = 2x - 3$
15. Hi ha infinites solucions. Per exemple $Q(x) = x + 3$, $Q(x) = 2x + 4$, $Q(x) = 3x + 5$, ...
16. No existeix cap polinomi que verifiqui les tres condicions alhora.
17. $S(x) = x^2 + 2x - 1$.
18. Hi ha infinites solucions. Per exemple $T(x) = x^2 - \frac{9x}{4} - \frac{5}{4}$, $T(x) = \frac{5x^2}{4} - \frac{11x}{4} - 2$, ...

19. $m = \frac{4}{3}$
20. a) -8 b) 31 c) -294
21. a) 1 b) 14
22. $a=2$ i $b=-1$
23. $p(x)=(x^2-5x+4)(x+2)$
24. $k = \frac{1}{2}$
25. $p(3)=0 \Rightarrow 3$ és una arrel del polinomi.
26. a) $2, -2$ i $\frac{9}{2}$ b) ± 4 c) $\pm\sqrt{2}$ i $\pm\sqrt{7}$ d) 1 i -2
27. a) $-5, -1$ i 2 b) $\pm 1, \pm 2$ i 5 c) $\pm 1, 2$ i 5
28. a) $\pm\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ i $\frac{1}{5}$
29. $a=19$
30. $a=5$ i $b=1$
31. a) $(x-6) \cdot (x-5)$ b) $9 \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right)^2$ c) $\frac{1}{9} \cdot (x+9) \cdot (x-9)$
d) $x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+2)$ e) $(x+1) \cdot (x-1)$ f) $(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+1)$
32. a) $(x-1) \cdot (x^2+x+1)$ b) $(x-1) \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2+1)$ c) $(x-3) \cdot (x+2) \cdot (x-1)^2$
d) $(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2$ e) $x \cdot (x+1) \cdot (x-3)^3$ e) $(x+3)^4$
f) $(x+4) \cdot (x+\sqrt{5}) \cdot (x-\sqrt{5})$ g) $(x+4) \cdot (x^2+5)$
33. $6x^3-6x^2-30x-18$
34. m.c.d. $(P(x), Q(x))=2x-8,$ m.c.m. $(P(x), Q(x))=24x^4+48x^3-456x^2-768x+1152$
35. m.c.d. $(P(x), Q(x))=x+1,$ m.c.m. $(P(x), Q(x))=x^3-x^2-10x-8$
 $P(x) \cdot Q(x) = \text{m.c.d.}(P(x), Q(x)) \cdot \text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) = (x-4) \cdot (x+2) \cdot (x+1)^2$
36. m.c.d. $(P(x), Q(x))=x+2,$ m.c.m. $(P(x), Q(x))=x^4-2x^3-9x^2+2x+8$
37. $A(x)=E(x)$ $C(x)=D(x)$
38. a) $\frac{x^2+6x+7}{x^3+6x^2+11x+6}$ b) $\frac{-4}{x^2+2x-3}$
39. a) $\frac{x-1}{2x-6}$ b) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x}$
40. a) $x = \frac{4}{5}$ b) $x=6$