

Exercicis de límits

Successions

- Donada la successió de terme general $a_n = \frac{n^2+2}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
 - calcula els 5 primers termes de la successió
 - i calcula el terme a_{100} .
- Donada la successió de terme general $a_n = n^2 - 30n + 1000$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
 - quin és el terme onzè?
 - existeix algun terme de la successió que sigui igual a 800?
 - i existeix algun terme de la successió que sigui igual a 700?
- Donada la successió creixent de terme general $a_n = 12n + 346$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a partir de quin valor de n tots els termes de la successió són majors o iguals que 999?
- Troba els set primers termes de la successió definida per la següent relació de recurrència:
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \forall n > 2 \end{cases}$$
- Quina és l'expressió del terme general en funció de n de les següents successions?
 - $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$
 - 30, 60, 90, 120, 150, 180, ...
 - 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, ...
- Estudia la monotonia de les successions següents i indica si estan fitades:
 - $a_n = 100 - 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 - $b_n = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 - $c_n = \frac{n+2}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 - $d_n = 10^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Límits de successions

7. Calcula els següents límits:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim n^3 & \text{b) } \lim n^{-3} & \text{c) } \lim \sqrt[6]{n^5} & \text{d) } \lim \frac{1}{n^5} \\ \text{e) } \lim 3^n & \text{f) } \lim 0,9^n & \text{g) } \lim n^n & \text{h) } \lim n^{-n} \end{array}$$

8. Calcula els següents límits:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim (-2n^3 + 5n^2 - 4n) & \text{b) } \lim \left(3n^{10} - 5^n - \frac{40}{n} \right) & \text{c) } \lim \left(2n^{-3} + 0,4^n + \frac{2}{n^2} \right) \\ \text{d) } \lim \frac{(2n+1)^3}{(3n-2)^3} & \text{e) } \lim \frac{5\sqrt[5]{n^4} - 2\sqrt[3]{n^2}}{2\sqrt[4]{n^3} + 5n} & \text{f) } \lim \frac{n^3 - 8n^4}{n^3 + 8n^2} \\ \text{g) } \lim \frac{n^4 - 4^n}{n^5 + 5^n} & \text{h) } \lim \frac{n + 5^n}{n - 3^n} & \text{i) } \lim \frac{n + 0,5^n + 2^{2n}}{n + 4^n} \end{array}$$

9. Calcula els següents límits:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim \left(\frac{4n-3}{5+2n} + \frac{n^2+n}{n^2+7} \right) & \text{b) } \lim \left(\frac{n^3}{2+n^2} \cdot \frac{3n+2}{n-5} \right) \\ \text{c) } \lim \left(\frac{4n}{1+n^2} + \sqrt{\frac{32n+48}{2n-3}} \right) & \text{d) } \lim \left(\frac{3n+1}{2n} \right)^{\frac{n^2+1}{n}} \\ \text{e) } \lim \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^{n^2+3n} & \text{f) } \lim \left(\frac{2n+12}{n-4} \right)^{\frac{2n^2}{n^2+1}} \end{array}$$

10. Calcula els següents límits resolent les indeterminacions que es puguin presentar:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+2}{n} \right) & \text{b) } \lim \left(\frac{2n^2}{2n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right) \\ \text{c) } \lim \left(\frac{n^4}{n^2+3} + \frac{1-n^3}{n} \right) & \text{d) } \lim \left(\frac{n^2-7n}{n} - \frac{n^2}{n+3} \right) \end{array}$$

11. Calcula els següents límits resolent les indeterminacions que es puguin presentar:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim \frac{n + \sqrt{n+1}}{3n} & \text{b) } \lim \frac{n + \sqrt{n^2+1}}{3n} \\ \text{c) } \lim (\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+3n}) & \text{d) } \lim (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\ \text{e) } \lim (n - \sqrt{n^2-6n}) & \text{f) } \lim (\sqrt{n+4} + \sqrt{n+9}) \end{array}$$

12. Calcula els següents límits resolent les indeterminacions que es puguin presentar:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{2n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+9}{n} \right)^{\frac{2n-6}{n+1}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{2n+1}{n}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n} \right)^{3n-1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+n} \right)^{2n+10}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+10}{2n-3} \right)^{\frac{n+10}{n+2}}$

Límits de funcions

13. Calcula els següents límits, indicant que passa quan $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ i $x \rightarrow \infty$:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-4}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x}$

14. Calcula els següents límits, indicant que passa quan $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ i $x \rightarrow \infty$:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^{-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,1^x$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,1^{-x}$

15. Calcula els següents límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^4)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2x - 3x^2)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2^x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2^x)$

16. Calcula els següents límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3^x}{\sqrt[3]{x^2 - x^2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3^x}{\sqrt[3]{x^2 - x^2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x + e^x}{10x + \pi^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x + e^x}{10x + \pi^x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3^x}{\sqrt[3]{x^2 - x^2}}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + \sqrt{x}}{x^2}$

17. Calcula els següents límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - 2)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x - 3} - 2x)$

18. Calcula els límits de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6}$ quan la variable x tendeix als valors 1, 2, 3 i 4.

19. Calcula els següents límits:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^3 - 1}{x+1}$$

20. Calcula els següents límits:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{x^2-4}{x+3} \right)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x+2}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-3}{x^2+3} \right) \right]$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} \cdot \left(\frac{5}{x+4} - \frac{3}{x+2} \right) \right]$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 2x - 3} \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \right)$$

21. Calcula els següents límits:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{x+8}}{x^2 - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{2x+12}}{x^2 - 4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{7x-10} - x}{2x - \sqrt{12x+40}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-3}}{\sqrt{x+1}-2}$$

22. Calcula els següents límits:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-4}{x-8} \right)^{2x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{3x+1} \right)^{\frac{2}{x-1}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{x-1}}$$

Continuïtat

23. Cadascuna de les funcions següents té un o més punts on no és contínua. Indica quins són aquests punts i quin tipus de discontinuïtat presenten:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-5}{x+1}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2-2}{x}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x < 2 \\ 3x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 2 \\ 3 & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$

24. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4}$

25. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^3 - 2x^2}$

26. Sigui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p \cdot x + 1}{x - 4} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x - 1}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Troba el valor de p perquè sigui contínua en $x=1$.

b) Amb el valor de p que has trobat, hi ha algun punt en què la funció sigui discontinua?

27. Sigui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k \cdot x}{x + 3} & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{3x - h}{x - 2} & \text{si } -2 < x < 1 \\ \frac{x + 1}{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Troba els valors de h i k perquè sigui contínua en $x=-2$ i $x=1$.

b) Amb els valors de h i k que has trobat, hi ha algun punt en què la funció sigui discontinua?

28. Troba el valor de k per tal que la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 - kx + 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sigui contínua.

29. Calculeu els punts de discontinuïtat de la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{2x+6} & \text{si } x < -2 \\ 2x+3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \frac{8x+2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solucions

1. a) $a_1=1, a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{11}{5}, a_4=3, a_5=\frac{27}{7}$ b) $a_{100}=\frac{1667}{17}$
2. a) 791 b) $a_{10}=a_{20}=800$ c) No
3. $a_n > 999, \forall n > 54$
4. $a_1=3, a_2=2, a_3=6, a_4=12, a_5=72, a_6=864$ i $a_7=62208$
5. a) $a_n=\frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$ b) $b_n=30n, \forall n \in \mathbb{N}$ c) $c_n=125 \cdot 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$
6. a) És una successió estrictament decreixent i està fitada superiorment ($a_n \leq 98, \forall n \in \mathbb{N}$)
b) És una successió estrictament creixent i està fitada inferiorment ($b_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$)
c) És una successió estrictament decreixent i està fitada ($1 < c_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$)
d) És una successió estrictament decreixent i està fitada ($0 < d_n \leq \frac{1}{10}, \forall n \in \mathbb{N}$)
7. a) $+\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) 0 e) $+\infty$ f) 0 g) $+\infty$ h) 0
8. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) $\frac{8}{27}$ e) 0 f) $-\infty$ g) 0 h) $-\infty$ i) 1
9. a) 3 b) $+\infty$ c) 4 d) $+\infty$ e) 0 f) 4
10. a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) -3 d) -4
11. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1 d) 0 e) 3 f) $+\infty$
12. a) e^4 b) 4 c) $\sqrt[3]{e^2}$ d) $\sqrt{e^9}$ e) $\frac{1}{e^2}$ f) 1
13. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-3} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-3} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-3} = 0$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-4} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-4} = 0$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x}$ $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$
14. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x = 0$ $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{-x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{-x} = +\infty$ $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,1^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,1^x = +\infty$ $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,1^x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,1^{-x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,1^{-x} = 0$ $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,1^{-x}$

15. a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$

16. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) 1 e) $+\infty$ f) \nexists

17. a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) 2

18. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \mp \infty$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

19. a) $\frac{1}{5}$ b) $\pm \infty$ c) 0 d) $\pm \infty$ e) 3

20. a) 1 b) 0 c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $-\frac{1}{12}$

21. a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{17}{12}$ c) $+\infty$ d) $-\frac{3}{14}$ e) 2

22. a) e^8 b) e^{-1} c) e

23. a) Té una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$.

b) Té una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

c) Té una discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

d) Té una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$.

e) Té una discontinuïtat de salt en $x = 2$.

f) Té una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

24. $f(x)$ és contínua excepte en $x = -1$ (discontinuitat asimptòtica) i en $x = 1$ (discontinuitat evitable).

25. $f(x)$ és contínua excepte en $x = 0$ (discontinuitat asimptòtica) i en $x = 2$ (discontinuitat evitable).

26. a) $p = -4$ b) No

27. a) $k = -\frac{5}{4} \wedge h = 4$ b) Sí. Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$.

28. $k = 0$

29. En $x = -3$ la funció presenta una discontinuïtat evitable i en $x = -2$ una discontinuïtat de salt.