SÈRIE 1

1.
Anomenarem x, y, z als preus de compra de cada immoble. Amb aquestes incògnites, les dades dels problema es tradueixen algebraicament en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 0,2x+0,5y+0,25z=0,6 \\ 0,8x+0,9y+0,85z=1,7 \end{array}\right\}.$$

Per a facilitar la resolució del sistema multiplicarem per 10 la segona i la tercera equacions. El sistema queda així:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+5y+2,5z=6 \\ 8x+9y+8,5z=17 \end{array}\right\},$$

que resoldrem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2,5 & 6 \\ 8 & 9 & 5,5 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0,5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3y+0,5z=2 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

que, substituint, ens dóna la solució del sistema: x = 1/2, y = 1/2, z = 1. La resposta a la pregunta és que els preus de compra dels immobles han estat de 500.000 euros els dos primers i 1 milió d'euros el tercer immoble.

2.

a. Les rectes són $y=-x+6$ i $y=-\frac{1}{2}x+5$. El sistema d'inequacions que verifiquen els punts de la regió ombrejada és:

$$\left.\begin{array}{rcl} y & \geq & -x+6 \\ y & \leq & -\frac{1}{2}x+5 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}.$$

b. Els vèrtexs de la regió factible són (6,0), (10,0) i (2,4). A més, z(6,0)=6, z(10,0)=10, z(2,4)=10. El màxim de la funció z a la regió factible és 10, i s'assoleix en tot el segment d'extrems (10,0) i (2,4).

3.

a. $f'(x) = \dfrac{2x(a-x)}{(ax+1)^2}$. Per a tenir un extrem en x = 1 cal que es verifiqui $f'(1) = 0$, és a dir, $2(2+a) = 0$ que es verifica quan $a = -2$. Ara tindrem que $f'(x) = \dfrac{4x(1-x)}{(-2x+1)^2}$. Si $0 < x < 1, f'(x) > 0$ i si $x > 1, f'(x) < 0$. Per tant, x = 1 correspon a un màxim relatiu.

b. Si a = 3, $f(x) = \dfrac{2x^2}{3x+1}$. Per tant, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. La funció no té asímptotes horitzontals. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} f(x) = \infty$. Per tant, la funció té la recta $x = -\dfrac{1}{3}$ com a asímptota vertical.

4.

a. Si A·B ha de ser una matriu quadrada d'ordre 2, cal que la matriu B tingui tres files. Per tant,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

D'aquí obtenim a = 2, b = -3, c = 1, d = 2. La matriu serà $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b. $$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

5.

a. La funció de beneficis serà $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000$. Tindrem, doncs, que B(x) = 0 si x = 40 o x = 600. En aquest interval la funció serà positiva: els beneficis seran positius sempre que produïm entre 40 i 600 bicicletes.

b. $B'(x) = -x + 320$. Si x < 320, B' > 0 i si x > 320, B' < 0: x = 320 correspon al màxim de beneficis, que és de 39200 €. A cada bicicleta guanyem, doncs, 39200/320=122,50 €

6.

a. El domini de f està format per tots els nombres reals. A més $f'(x) = 1 + 3e^{-3x}$. Com que la funció exponencial és estrictament positiva, f' també ho és. Per tant, f és estrictament creixent.

b. $f(0) = -1, f'(0) = 4$; la recta tangent serà $y = 4x - 1$.

SÈRIE 4

1.

a.

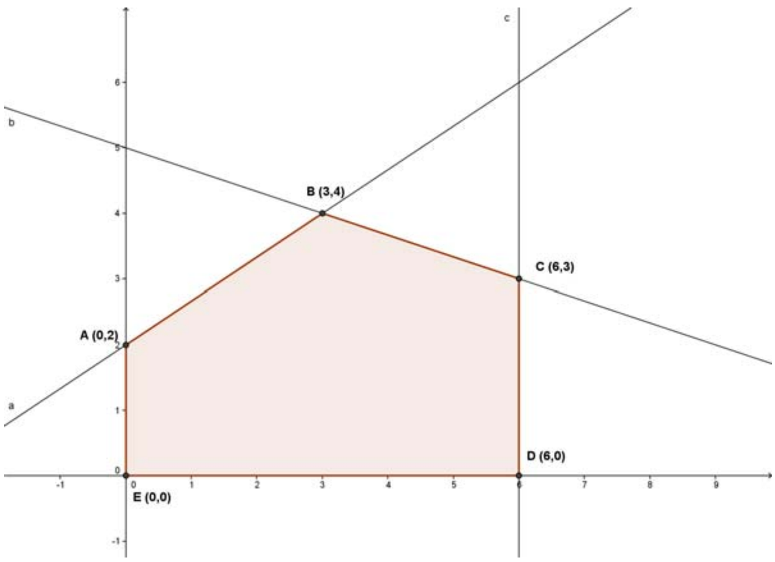
El domini de f coincideix amb el de la funció logarítmica: es tracta dels nombre reals estrictament positius. La funció és contínua en tot el seu domini. Per tant, com que $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, l'asímptota vertical de la funció f és x = 0.

b.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, que s'anul·la quan $1 - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = 1$. Com que la derivada és negativa quan $0 < x < 1$ i és positiva quan x > 1, tenim que f és decreixent quan $0 < x < 1$ i és creixent quan x > 1. Com que $f(1) = 1 - 0 = 1$, la funció f té un mínim en el punt (1,1).

2.

a.



Al gràfic adjunt tenim la regió i els seus vèrtexs. El punt P(1,3) no pertany a la regió ja que el punt (1,2) és de la recta AB. El punt Q(3,3) sí que hi pertany ja que es troba per sota del punt B, en la mateixa vertical.

b.

$F(0,2) = 8$, $F(3,4) = 19$,
$F(6,3) = 18$, $F(6,0) = 6$,
$F(0,0) = 0$. Per tant, el valor màxim és 19, i es dóna en el punt B. El valor mínim és 0, i es dóna en el punt E.

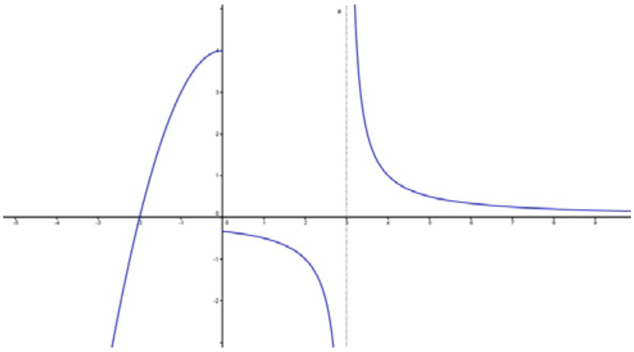
3.

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$.

4.

a.



La funció és discontínua a x = 0 (els límits laterals són diferents) i a x = 3 (la funció hi té una asímptota).

b. Quan x > 0, $f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$. Per tant, $f'(4) = -1$ i $f(4) = 1$. L'equació de la recta tangent serà $y = -x + 5$.
Criteris de correcció: 0,5 punts pel càlcul de la derivada. 0,5 punts per la determinació de la recta tangent.

5.

a. Aplicant Gauss tindrem:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right)$$
On ja es veu que les matrius associada i ampliada són de rang 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat. La seva solució és:
$$x = \frac{4+z}{3}, y = \frac{4z-5}{3}, z = z.$$

b. $x + y + z = 5 \to z = 2, y = 1, x = 2$.

6.

a. F és una funció exponencial amb la base menor que 1. Per tant, és decreixent.

b. $40000 \cdot 0{,}94^t = 20000 \to 0{,}94^t = \frac{1}{2} \to t = -\frac{\ln 2}{\ln 0.94} = 11{,}20$. Caldrà que passin més d'onze anys.