SÈRIE 3

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú.

Qüestions

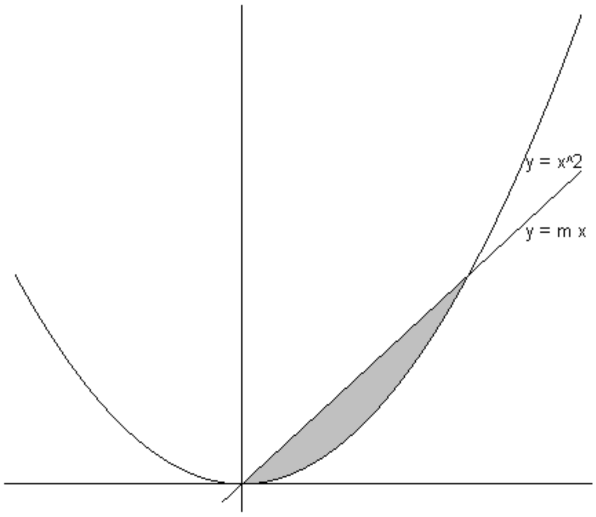
1. Considereu la paràbola $y = x^2$ i la recta $y = mx$, amb m real positiu.

a) Calculeu l'àrea de la regió tancada delimitada per les gràfiques de la paràbola i la recta en funció de m.

b) Quin valor té m si l'àrea de l'apartat a) és 288?

Puntuació: Cada apartat: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Fem la gràfica:



a) La intersecció de la recta i la paràbola és

$$\left.\begin{array}{l} y = mx \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \text{d'on} \quad mx = x^2 \quad \text{i} \quad x(x-m) = 0 .$$

Les dues interseccions són en els punts $(0,0)$ i (m,m^2). Per tant, l'àrea és:

$$S = \int_0^m \left(mx - x^2\right) dx = \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^m = \frac{m^3}{6}$$

b) Si ha de ser $S = 288$, resulta $m^3 = 2^6 \cdot 3^3$ i $\boxed{m = 12}$.

2. En un determinat poble es duen a terme tres espectacles que anomenarem E_1, E_2 i E_3 respectivament, cada un amb un preu diferent.

Calculeu el preu de cada espectacle si sabem el següent:

- Si assistíssim dues vegades a E_1, una vegada a E_2 i també una vegada a E_3 ens costaria 34 €.
- Si anéssim tres vegades a l'espectacle E_1 i una a E_2 ens costaria 46,5 €.
- En el cas d'assistir només una vegada a cada un dels tres espectacles ens costaria 21,5 €.

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Solució: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: Siguin x, y, z els preus dels espectacles E_1, E_2, E_3, respectivament. Les condicions donen el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 34 \\ 3x + y = 46,5 \\ x + y + z = 21,5 \end{cases}$$

Aplicant Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 21,5 \\ 2 & 1 & 1 & 34 \\ 3 & 1 & 0 & 46,5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21,5 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -3 & -18 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21,5 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

d'on obtenim $\boxed{z = 0, y = 9, x = 12,5}$. Es a dir, que l'espectacle E_1 costa 12,5 €, l'espectacle E_2 costa 9 € i l'espectacle E_3 és gratuït.

3. En les rebaixes d'estiu una botiga anuncia que tots els articles estan rebaixats un 20%.
   a) Si un article rebaixat ens ha costat 40 €, quant costava abans de les rebaixes?
   b) Acabades les rebaixes el botiguer pensa que, apujant el preu de tots els productes un 20%, tornarà al preu d'abans de les rebaixes. Creieu que és així? Quina variació percentual es produeix disminuint el 20% el preu original i després augmentant un 20% el preu rebaixat?
   c) Quin ha de ser l'augment de preu que hauria d'aplicar als productes rebaixats per tornar al preu d'abans de les rebaixes?

Puntuació: Apartats a) i c) : 0,5 punts cadascun. Apartat b): 1 punt. Total: 2 punts.

Solució:

a) El preu abans de la rebaixa era de $\frac{40}{0,8} = 50€$.

b) No serà igual, ja que el percentatge del nou preu sobre el preu inicial serà $0,8 \cdot 1,2 = 0,96 = 96\%$, i per tant hi haurà una $\boxed{\text{rebaixa del 4\%}}$.

c) Per tal que el nou preu sigui idèntic al preu d'abans de les rebaixes, cal aplicar un augment r tal que $0,8(1+r)=1$, d'on resulta $\boxed{r = 0,25 = 25\%}$.

4. Quants anys han de passar perquè un capital de 5000 € posat a un interès compost del 2,5% anual es converteixi en un capital final de 6092 €?

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació del temps: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: El plantejament és:

$$5000 \cdot (1,025)^t = 6092$$

$$(1,025)^t = \frac{6092}{5000} = 1,2184$$

Prenent logaritmes obtenim:

$$t = \frac{\log 1,2184}{\log 1,025} = 7,9999 \approx 8$$

resultant

$$t = 7,9999 \approx 8$$

Ha d'estar $\boxed{\text{8 anys}}$.

Nota: S’acceptarà com a bona una solució obtinguda per tempteig, sense utilitzar logaritmes, sempre que el resultat sigui correcte i els càlculs estiguin explicitats.

Problemes

5. El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Venuda a 130 € la compren 1000 persones. Per cada € que augmenta o disminueix aquest preu, el nombre de compradors disminueix o augmenta, respectivament, en 60.

a) A quin preu s'ha de vendre la joguina per obtenir un benefici màxim?

b) Calculeu també el benefici màxim i el nombre de compradors corresponent.

Puntuació: Plantejament: 2 punts. Apartats a) i b): 1 punt cadascun. Total: 4 punts. Sigueu benvolents amb els arrodoniments a cèntim d'euro.

Solució: Fem un esquema del plantejament, essent x el sobrepreu sobre els 130 €.

Preu de venda/unitari	Benefici/unitari	Nombre compradors	Benefici total
130	50	1000	$50 \cdot 1000 = 50000$
$130 + x$	$50 + x$	$1000 - 60x$	$(50+x)(1000-60x)$

Per tant, el benefici és

$$B(x) = 50000 - 2000x - 60x^2$$

Hem de trobar el màxim de la paràbola. La derivada de $B(x)$ és

$$B'(x) = -120x - 2000$$

Igualant a zero resulta:

$$x = -\frac{2000}{120} = -16,667$$

que correspon a un benefici màxim, ja que B ve donat per una paràbola amb coeficient de x^2 negatiu. Així, el preu de venda òptim és $\boxed{P_0 = 130 - 16,667 = 113,33€}$ i correspon a un nombre de compradors $\boxed{C_0 = 1000 - 60 \cdot (-16,667) = 2000}$ i a un benefici

$$\boxed{B_0 = 33,33 \cdot 2000 = 66660,00€}$$

6. Un triangle té dos vèrtexs A i B en els punts $A=(0,0)$ i $B=(2,0)$. L'àrea val 3. Sabent que el tercer vèrtex C té ordenada positiva i està situat sobre la recta $2x-y-5=0$, calculeu les coordenades de C i el perímetre del triangle. Feu-ne la gràfica corresponent.

Puntuació: Plantejament: 1 punt. Determinació del vèrtex C: 1 punt. Perímetre: 1 punt. Gràfica: 1 punt. Total 4 punts.

Solució: La base del triangle val 2. Com la seva àrea val 3, la seva altura val $\frac{2S}{b}=\frac{2\cdot 3}{2}=3$.
Per tant, el vèrtex C és la intersecció de la recta $2x-y-5=0$ amb $y=3$, que dóna el punt $\boxed{C(4,3)}$.

El perímetre val:

$$p=2+\sqrt{2^2+3^2}+\sqrt{4^2+3^2}=7+\sqrt{13}$$

Finalment la gràfica és: