Exercicis de vectors en el pla

Definició de vector

1. Determina els components cartesians i el mòdul de cadascun dels vectors següents. En cada cas fes-ne la representació gràfica.

a) $\overrightarrow{AB}$ amb $A(-1, 7)$ i $B(-7, -1)$.

b) $\overrightarrow{CD}$ amb $C(6, -2)$ i $D(8, 4)$.

c) $\overrightarrow{EF}$ amb $E(0, 0)$ i $F(-2, -5)$.

d) $\overrightarrow{GH}$ amb $G(-4, 0)$ i $H(8, 5)$.

2. El vector $\overrightarrow{PQ}=(-4, 8)$ té l'origen en el punt $P(6, -1)$. Determina les coordenades de l'extrem Q i el mòdul d'aquest vector.

3. El vector $\overrightarrow{PQ}=(3, -6)$ té l'extrem en el punt $Q(2, 1)$. Determina les coordenades de l'origen P i el mòdul d'aquest vector.

4. Expressa en forma polar el vector posició de cadascun dels punts següents:

a) $A(3, 3)$ b) $B(-\sqrt{3}, 3)$ c) $C(-\sqrt{8}, -\sqrt{8})$ d) $D(6, -8)$

5. Calcula les coordenades cartesianes dels punts M, N, R i S els vectors de posició dels quals són respectivament:

a) $\vec{m}=4_{30°}$ b) $\vec{n}=\sqrt{18}_{135°}$ c) $\vec{r}=6_{270°}$ d) $\vec{s}=\sqrt{3}_{330°}$

6. El vector $\vec{r}$ té l'origen en el punt $(3, -2)$ i l'extrem en el punt $(4, 1)$. El vector $\vec{s}$, equipol·lent a l'anterior, té origen en el punt $(4, 4)$. Troba'n les coordenades de l'extrem.

7. Considera els punts $A(2, -3)$, $B(-3, 1)$, $C(0, 5)$ i $D(x, y)$. Calcula les coordenades del punt D sabent que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són equipol·lents.

8. Siguin els punts $A(-6, -4)$, $B(1, -3)$, $C(6, 2)$ i $D(x, y)$.

a) Calcula les coordenades del punt D sabent que el quadrilàter $ABCD$ és un paral·lelogram.

b) Demostra que aquest paral·lelogram és un rombe.

c) Troba l'àrea i el perímetre.

Operacions amb vectors. Dependència i independència lineal

9. Donats els vectors $\vec{a}=(6,-4)$ i $\vec{b}=(4,2)$, calcula els components del vector $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Comprova que es verifica $|\vec{c}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

10. Donats els vectors $\vec{v}=(3,-7)$ i $\vec{w}=(-5,3)$, troba els components dels vectors $2\cdot\vec{v}+3\cdot\vec{w}$ i $-3\cdot\vec{v}+4\cdot\vec{w}$

11. Determina els vectors unitaris en la direcció i el sentit dels vectors:

a) $\vec{a}=(2,-4)$ b) $\vec{b}=(-2,-4\sqrt{2})$ c) $\vec{c}=\left(-\frac{1}{12},\frac{1}{9}\right)$

12. Esbrina si són linealment dependents o independents els parells de vectors següents:

a) $\vec{a}=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{9}\right)$ i $\vec{b}=(18,8)$ b) $\vec{c}=\left(\frac{1}{2},6\right)$ i $\vec{d}=\left(\frac{1}{6},2\right)$ c) $\vec{e}=(13,0)$ i $\vec{f}=(17,0)$

13. Els vectors $(5,-2)$ i $(12,k)$ són linealment dependents. Quin valors pot tenir *k*?

14. Els vectors $(6,5)$ i $(k,-8)$ són linealment independents. Quin valors pot tenir *k*?

15. Els vectors $(5,k)$ i $(k,125)$ són linealment dependents. Quin valors pot tenir *k*?

16. Expressa el vector $(-6,14)$ com a combinació lineal dels vectors $(3,-4)$ i $(-2,3)$.

17. Quins dels parells de vectors següents són una base del pla? Justifica'n la resposta.

a) $\vec{a}=(6,0)$ i $\vec{b}=(6,1)$ b) $\vec{c}=(5,10)$ i $\vec{d}=(-1,-2)$ c) $\vec{e}=(0,1)$ i $\vec{f}=(1,0)$

18. Els components del vector $\vec{p}$ en la base $B=\{(7,1),(-3,4)\}$ són $(-3,2)_B$. Determina els components de $\vec{p}$ en la base canònica.

19. Troba els components del vector $\vec{a}=(2,6)$ en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ on $\vec{u}=(2,1)$ i $\vec{v}=(3,-1)$. Comprova gràficament el resultat obtingut prenent un origen comú per als tres vectors.

20. Els components del vector $\vec{a}$ en la base $B=\{(3,-1),(1,1)\}$ són $(4,-1)_B$. Determina els components de $\vec{a}$ en la base $B'=\{(2,1),(1,2)\}$.

Producte escalar de dos vectors

21. Donats els vectors $\vec{a} = (3,\ 4)$ i $\vec{b} = (6,\ 3)$, calcula:

a) el seu producte escalar,

b) l'angle que formen,

c) l'angle que formen els vectors $2\vec{a}$ i $5\vec{b}$,

d) l'angle que formen els vectors $-3\vec{a}$ i $2\vec{b}$

e) i l'angle que formen els vectors $-2\vec{a}$ i $-3\vec{b}$.

22. Donats els vectors $\vec{a} = (2,\ 5)$, $\vec{b} = (-2,\ 1)$ i $\vec{c} = (2,\ -3)$, comprova si es verifica la igualtat:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) \stackrel{?}{=} \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

23. Donats els vectors $\vec{a} = (1,\ 3)$, $\vec{b} = (-5,\ 1)$ i $\vec{c} = (2,\ 4)$, comprova si es verifica la igualtat:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \stackrel{?}{=} \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

24. Demostra que el triangle de vèrtexs els punts $A(2,\ 10)$, $B(5,\ 1)$ i $C(8,\ 2)$ és rectangle en B. Quant mesuren els altres dos angles del triangle?

25. Troba un vector de mòdul 15 que sigui ortogonal al vector $\vec{v} = (48,\ 14)$.

26. Calcula $\vec{v}\cdot\vec{v}$ sabent que $\vec{v}\cdot\vec{w} = 18$, $\vec{w}\cdot\vec{w} = 27$ i l'angle entre els vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ és de 30°.

27. Busca el valor de k perquè els vectors $\vec{u} = (1,\ 2)$ i $\vec{v} = (k,\ 1)$ formin un angle de 30°.

28. Dos vectors són tals que $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ i $|\vec{a}+\vec{b}|=2$. Troba l'angle que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Aplicacions dels vectors

29. Els punts $A(3,\ 8)$, $B(6,\ 1)$ i $C(-1,\ k)$ estan alineats. Calcula k.

30. Donats els punts $P(-1,\ 4)$ i $Q(5,\ 5)$, quines coordenades ha de tenir el punt R per tal que es verifiqui $3\cdot\overrightarrow{PR}-4\cdot\overrightarrow{QR} = 0$?

31. Els punts $A(-12, -14)$, $B(-8, -13)$ i $C(-10, -4)$ són els tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Troba les coordenades del quart vèrtex D i les del punt d'intersecció de les diagonals.

32. Els punts $A(-20, -6)$ i $B(28, 8)$ són els extrems d'un dels diàmetres d'una circumferència. Determina'n les coordenades del centre i calcula'n l'àrea del cercle delimitat per la circumferència.

33. Troba les coordenades dels punts que divideixen el segment d'extrems $P(7, 19)$ i $Q(13, 12)$ en cinc parts iguals.

34. El baricentre d'un triangle es troba en el punt $G(3, 5)$ i dos dels seus vèrtexs es troben en els punts $A(4, 2)$ i $B(6, 8)$. Troba les coordenades de l'altre vèrtex del triangle.

Problemes

35. Un barquer està remant sobre una barca. Es vol mantenir sempre perpendicular a la ribera del riu, creuant-lo amb una velocitat mitjana de 36 km/h. L'aigua del riu flueix a una velocitat de 9 km/h. Amb quina velocitat ha d'impulsar la barca? En quina direcció?

36. Tres forces concurrents en el pla XY, els mòduls de les quals són $F_1 = 10$ N, $F_2 = 8$ N i $F_3 = 6$ N i que formen respectivament angles amb l'eix OX de $60°$, $-30°$ i $-45°$. Calculeu el mòdul de la resultant i l'angle que forma amb l'eix OX.

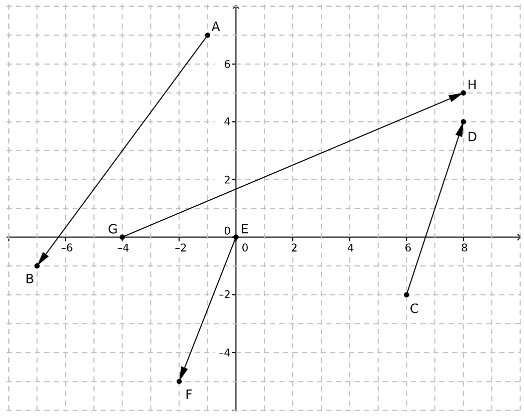
Solucions

1. a) $\overrightarrow{AB}=(-6,\ -8)$ $\quad |\overrightarrow{AB}|=10$

   b) $\overrightarrow{CD}=(2,\ 6)$ $\quad |\overrightarrow{CD}|=2\sqrt{10}$

   c) $\overrightarrow{EF}=(-2,\ -5)$ $\quad |\overrightarrow{EF}|=\sqrt{29}$

   d) $\overrightarrow{GH}=(12,\ 5)$ $\quad |\overrightarrow{GH}|=13$

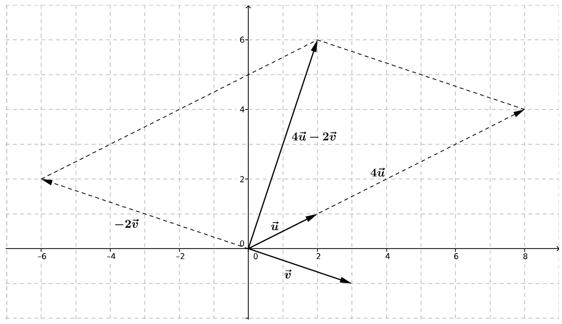


2. $|\overrightarrow{PQ}|=4\sqrt{5}$ $\qquad Q(2,\ 7)$
3. $|\overrightarrow{PQ}|=3\sqrt{5}$ $\qquad P(-1,\ 7)$
4. a) $\vec{a}=3\sqrt{2}_{45°}$ $\qquad$ b) $\vec{b}=2\sqrt{3}_{120°}$ $\qquad$ c) $\vec{c}=4_{225°}$ $\qquad$ d) $\vec{d}=10_{306{,}87°}$
5. a) $\vec{m}=(2\sqrt{3},\ 2)$ $\qquad$ b) $\vec{n}=(-3,\ 3)$ $\qquad$ c) $\vec{r}=(0,\ -6)$ $\qquad$ d) $\vec{s}=\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
6. $D(5,\ 7)$
7. $D(-5,\ 9)$
8. a) $D(-1,\ 1)$

   b) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DA}|=20\sqrt{2}$. És un rombe perquè els quatre costats mesuren el mateix.

   c) $P=20\sqrt{2}$ u $\qquad A=30$ u^2
9. $\vec{c}=(10,-2)$ $\qquad |\vec{c}|=2\sqrt{26}\approx 10{,}20$ i $|\vec{a}|+|\vec{b}|=\sqrt{52}+2\sqrt{5}\approx 11{,}68$, per tant $|\vec{c}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$
10. $2\cdot\vec{v}+3\cdot\vec{w}\ =\ (-9,\ -5)$ $\qquad -3\cdot\vec{v}+4\cdot\vec{w}\ =\ (-29,\ 33)$
11. a) $\vec{u}_a=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ $\qquad$ b) $\vec{u}_b=\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ $\qquad$ c) $\vec{u}_c=\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$
12. a) v.l.i. $\quad$ b) v.l.d. $\quad$ c) v.l.d.
13. $k=-\dfrac{24}{5}$
14. $k\neq-\dfrac{48}{5}$
15. $k=\pm 25$
16. $(-6,\ 14)\ =\ 10\cdot(3,\ -4)\ +\ 18\cdot(-2,\ 3)$
17. Són base del pla els vectors que son v.l.i., és a dir el parell $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i el parell $\vec{e}$ i $\vec{f}$.
18. $\vec{p}\ =\ (-27,\ 5)$

19. $\vec{a} = 4\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{v}$



20. $\vec{a} = (9, -7)_{B'}$

21. a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 30$ b) $\alpha = 26{,}57°$ c) $\alpha \approx 26{,}57°$ d) $180° - \alpha \approx 153{,}43°$ e) $\alpha \approx 26{,}57°$

22. $\left.\begin{array}{l} \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = -10 \\ \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

23. $\left.\begin{array}{l} (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = (-4, -8) \\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (-6, -18) \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

24. $\beta \approx 90°$, $\alpha \approx 18{,}43°$ i $\gamma \approx 71{,}57°$

25. $\vec{v}_1 = \left(\frac{21}{5}, \frac{72}{5}\right)$, $\vec{v}_2 = \left(-\frac{21}{5}, -\frac{72}{5}\right)$

26. $\vec{v}\cdot\vec{v} = 16$

27. $k = \dfrac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11}$

28. $\theta = 180° - \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 110{,}70°$

29. $k = \dfrac{52}{3}$

30. $R(23, 8)$

31. $D(-14, -5)$, $M(-11, -9)$

32. $C(4,1)$ $A = 625\pi$ u.a. $\approx 1963{,}50$ u.a.

33. $M_1\left(\frac{41}{5}, \frac{88}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{47}{5}, \frac{81}{5}\right)$, $M_3\left(\frac{53}{5}, \frac{74}{5}\right)$ i $M_4\left(\frac{59}{5}, \frac{67}{5}\right)$

34. $C(-1, 5)$

35. Haurà de remar amb una velocitat de 37,11 km/h i formant un angle de 104,04° amb la direcció del corrent.

36. $F = 16{,}17$ N $\alpha = 1{,}48°$